

40
Math. P.
411
k

Schreiber

Projectionsmethode

Haupt-Conserv. d. Armees

~~B. 8/2.~~
Schre.

4^o

4^o Math. P. 411 k

THEORIE
DER
PROJECTIONS-METHODE

DER
HANNOVERSCHEN LANDESVERMESSUNG

VON

OS

OSCAR SCHREIBER,

HAUPTMANN IM KÖNIGL. HANNOV. 1. JÄGER-BATAILLON.

B.

Schre



HANNOVER.
HAHN'SCHE HOFBUCHHANDLUNG.

1866.

gd/69/1844

THEORIE

PROJECTIONS-METHODE

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Wehrkreis-
bücherei VII
München

Abtheilung 39077

Willh. Riemschneider's Buchdruckerei. Hannover.

Vorrede.

Hoffentlich bedarf es wohl keiner Entschuldigung, die vorliegende vortreffliche Schrift zum Druck befördert zu haben.

Dem unsterblichen Autor der „*Theoria motus corporum coelestium*“ ist es bekanntlich nicht mehr vergönnt gewesen, seine grossen Leistungen auf dem Gebiete der Geodäsie in einer ähnlichen Weise vollständig ausgearbeitet dem wissenschaftlichen Publikum zu übergeben wie diejenigen der Astronomie; es liegen nur einzelne Bruchstücke vor, aus denen auf die Grösse und Bedeutung des Ganzen zurückgeschlossen werden kann. Glücklicher Weise besitzen wir aber in der Hannoverschen Landesvermessung zum wenigsten Eine geodätische Arbeit, welche ganz und vollständig durch Gauss ausgeführt und vom Gaussischen Geiste durchwehet ist und genau dasjenige, was Gauss gewollt hat, erkennen lässt. Zum vollen Verständniss dieser Messung fehlte nur bis jetzt eine Darstellung derjenigen Methode, nach welcher Gauss dabei die sphäroidische Erdoberfläche auf der Ebene abbildet; nicht etwa so zu verstehen, als ob es sich um den untergeordneten Zweck der Anfertigung einer Landkarte handelte, der allerdings nebenher auch erreicht wird, sondern in jener viel wichtigern und für das Gaussische Verfahren gerade besonders charakteristischen Weise, wo die Projection des Sphäroids ein wesentliches Glied in der Kette der gesammten auszuführenden Rechnungen ausmacht. Selbst in Hannover, wo auf der Grundlage der Gaussischen Projection fortwährend topographische Aufnahmen stattgefunden haben, war die Kenntniss der Fundamente dieser Projection so gut wie verloren gegangen, und man arbeitete nur unter dem Einflusse einer Art von Tradition nach überlieferten Schablonen. Eine Darstellung der Theorie dieser Projection zu geben war aber darum keineswegs unmöglich geworden. Es kam darauf an, die vorhandenen Andeutungen und Bruchstücke aufzusuchen, mit Sorgfalt an dieselben anzuknüpfen und so den Versuch zu wagen, die analytischen Entwicklungen, welche Gauss selbst schon besessen haben muss, vollständig wieder ins Leben zu rufen; und in der That ist eine solche Arbeit schon seit Jahren ein Lieblingsproject des Unterzeichneten gewesen, von dessen Ausführung nur anderweitige Berufsarbeiten ihn bislang abzuhalten vermocht haben.

Diese Ausführung ist nunmehr unnöthig geworden. Herr Hauptmann Schreiber, mit welchem der Unterzeichnete mehrfach über diesen Gegenstand correspondirt hat, legte ihm vor nicht langer Zeit eine Arbeit vor, in welcher er sogleich mit freudiger Ueberraschung genau dasjenige erkannte, was er selbst zu geben den Wunsch gehabt hat. Einige in dem ersten Entwurf dieser Arbeit offenbar zu kurz behandelte Parthien wurden hinterher von dem Herrn Verfasser aufs vollständigste weiter ausgeführt; und somit glaubt der Unterzeichnete auf den Beifall aller derer, welche an Untersuchungen dieser Art ein Interesse nehmen, rechnen zu dürfen, wenn er zu dieser nunmehr vollendeten Arbeit zum wenigsten die Rolle des Herausgebers übernimmt und dieselbe so schleunig wie möglich dem Drucke überliefert. Durch Allerhöchste Königliche Munificenz wurden mit dankbar erkannter Huld und Gnade diejenigen Mittel bewilligt, welche die Ausführung des Drucks möglich machten.

Die eigentliche Bedeutung dieser Schrift ist darin zu suchen, dass hier in einem einfachen Beispiele der Weg genau vorgezeichnet liegt, welchen Gauss bei der Berechnung der trigonometrischen Messungen eingeschlagen wissen will, wie solches der Herr Verfasser in der Einleitung näher anzeigt. Es wird demnach hier nicht nur dem Praktiker das volle Verständniss des Materials der Hannoverschen Landesvermessung eröffnet, so dass diese Schrift wie eine Vorarbeit zu einer demnächstigen Herausgabe der gesammten Hannoverschen Landesvermessung angesehen werden kann, sondern es bietet diese Schrift auch ein zweckmässiges Vorstudium zu denjenigen anderweitig von Gauss angegebenen Projectionsmethoden, welche für andere Fälle die geeigneteren sind, und somit dürfte die vorliegende Arbeit zugleich als ein Beitrag zu dem grossen Unternehmen der mitteleuropäischen Gradmessung willkommen geheissen werden, indem sie eine Andeutung davon giebt, wie die Ergebnisse dieser Gradmessung demnächst zu verwerthen sein werden, wenn es im Gaussischen Geiste geschehen soll.

Hannover, im Mai 1866.

Wittstein,

Dr. ph. und Professor.

I n h a l t.

	Seite
Einleitung	1
§. 1. Grundbedingungen der Projection.	3
§. 2. Coordinatensystem.	3
§. 3. Erddimensionen und Constanten	3
§. 4. Allgemeiner Ausdruck der Conformitäts-Bedingung für Uebertragungen der Ellipsoidfläche auf die Ebene	4
§. 5. Berechnung der Coordinaten aus Länge und Breite.	8
§. 6. Fortsetzung. Berechnung elliptischer Meridianbögen aus den Breiten ihrer Endpunkte	13
§. 7. Fortsetzung. Umformung der Formeln für die Coordinaten behuf numerischer Berechnung	18
§. 8. Berechnung der Länge und Breite aus den Coordinaten	22
§. 9. Fortsetzung. Berechnung der Breite des Endpunkts eines elliptischen Meridianbogens aus dessen von einer festen Breite aus gezählten Länge.	25
§. 10. Fortsetzung. Umformung der Formeln für Breite und Länge behuf numerischer Berechnung	28
§. 11. Berechnung der Convergenz des Meridians aus den Coordinaten	30
§. 12. Berechnung des Vergrößerungsverhältnisses aus Länge und Breite.	34
§. 13. Berechnung des Vergrößerungsverhältnisses aus den Coordinaten	37
§. 14. Bestimmung des Unterschiedes zwischen den Azimuthen einer auf die Ebene projecirten geodätischen Linie und der zwischen denselben Endpunkten enthaltenen Geraden.	39
§. 15. Relation zwischen der Länge einer geodätischen Linie und der Länge der zwischen den Projectionen ihrer Endpunkte enthaltenen Geraden	48
§. 16. Uebertragung der trigonometrischen Messungen auf die Ebene	52
Zusatz I. Entwicklung der Formeln für die Reduction des Azimuths und der Länge geodätischer Linien auf die Ebene bis zu Grössen 5. Ordnung incl.	57
A. Entwicklung der Azimuthunterschiede ϕ_1 und ϕ_2 bis auf Grössen 5. Ordnung incl. . . .	58
B. Entwicklung der Differenz $\log r - \log R$ bis auf Grössen 5. Ordnung incl.	75
Zusatz II. Berechnung des Excesses der Winkelsumme eines sphäroidischen Dreiecks aus den ebenen Coordinaten seiner Winkelpunkte	87
Schlussbemerkungen	91
Tafeln	93

Berichtigungen.

Seite 5 Zeile 11 v. o. lies unendlich statt unendliche
 „ 14 „ 8 v. u. lies $\alpha_2 \sin 6 \varphi_0$ statt $\alpha_2 \sin 6 \varphi$
 „ 18 „ 6 v. o. lies $\log(1+z)$ statt $\log(1+z)$
 „ 38 „ 7 v. o. lies $-\frac{1+3\delta \cos \chi^2 - 2\delta \cos \chi^4}{(1+\delta \cos \chi^2)^2 \cos \chi^2}$ statt $-\frac{1+3\delta \cos \chi^2 - 2\delta \cos \chi^4}{(1+\delta \cos \chi^2) \cos \chi^2}$
 „ 47 „ 7 des ersten Beispiels lies 5.26839(n) statt 5.26839

Seite	21	Zeile	4	v. o. lies	Es sei: statt Nach dem Berliner astronomischen Jahrbuche für 1852 ist:	$\left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Seite 21 Zeile 4 v. o. lies Es sei: statt Nach dem Berliner astronomischen Jahrbuche für 1852 ist:} \\ \text{„ 21 „ 6 v. o. lies } 32^\circ 3' 30''.0 \text{ statt } 31^\circ 3' 30''.0 \\ \text{„ 33 „ 15 v. u. lies } 32 \ 3 \ 30 \ .0 \text{ statt } 31 \ 3 \ 30 \ .0 \\ \text{„ 84 „ 14 v. u. lies Es sei: statt Nach dem Berliner astronomischen Jahrbuche für 1852 ist:} \\ \text{„ 84 „ 12 v. u. lies } 32^\circ 3' 30''.0 \text{ statt } 31^\circ 3' 30''.0 \\ \text{„ 85 „ 13 v. u. lies } 32^\circ 3' 30''.0 \text{ statt } 31^\circ 3' 30''.0 \end{array}} \right\}^*)$
„	21	„	6	v. o. lies	$32^\circ 3' 30''.0$ statt $31^\circ 3' 30''.0$	
„	33	„	15	v. u. lies	$32 \ 3 \ 30 \ .0$ statt $31 \ 3 \ 30 \ .0$	
„	84	„	14	v. u. lies	Es sei: statt Nach dem Berliner astronomischen Jahrbuche für 1852 ist:	
„	84	„	12	v. u. lies	$32^\circ 3' 30''.0$ statt $31^\circ 3' 30''.0$	
„	85	„	13	v. u. lies	$32^\circ 3' 30''.0$ statt $31^\circ 3' 30''.0$	

*) In dem Beispiele auf Seite 21 ist aus der Länge von Berlin
 $= 31^\circ 3' 30''.0$

irrhümlich abgeleitet:

$$\lambda = + 0^\circ 18' 30''.0,$$

während es heissen muss:

$$\lambda = + 1^\circ 18' 30''.0;$$

und es ist dieser irrhümliche Werth von λ auch in der Rechnung beibehalten.

Um auf die einfachste Weise den Widerspruch zu beseitigen, verstehe man unter „Berlin“ einen Punkt, dessen östliche Länge von Ferro $= 32^\circ 3' 30''.0$ (anstatt $31^\circ 3' 30''.0$) ist.

Da die in dem genannten Beispiele berechneten Coordinaten den Beispielen auf Seite 33 und auf den Seiten 84, 85, 86 wieder zu Grunde gelegt sind, so gilt für diese dieselbe Bemerkung.

Es müssen hiernach die obigen durch eine Klammer zusammen gefassten Berichtigungen eintreten.

Einleitung.

Die trigonometrische Vermessung des Königreichs Hannover ist in den Jahren 1821 bis 1844 zum Theil von Gauss selbst, zum Theil unter seiner Leitung ausgeführt. Bei der mathematischen Behandlung der Messungen sind Methoden zur Anwendung gekommen, die Gauss eigenthümlich und von den sonst gewöhnlichen sehr verschieden sind.

Das von Gauss angewandte Verfahren, die geodätischen Messungen zu berechnen, ist nämlich in Kürze Folgendes:

- 1) Die auf jedem Standpunkte beobachteten Winkel werden unter sich ausgeglichen und die excentrisch gemessenen Winkel centriert.
- 2) Das durch die Messungen auf der Erdoberfläche gebildete Dreieckssystem, worin sämtliche Winkel, die Länge wenigstens einer Seite und das Azimuth wenigstens einer Seite bekannt sein müssen, wird sodann nach einer besondern von Gauss erdachten Projectionsmethode auf eine Ebene dergestalt übertragen, dass hier ein System geradliniger Dreiecke erhalten wird, dessen Winkelpunkte die Projectionen der Winkelpunkte jenes Systems sind und worin die den bekannten Stücken jenes Systems correspondirenden Stücke mit gleicher Schärfe bestimmt sind. Durch diese Uebertragung wird neben andern Vortheilen der erlangt, dass die weiteren Berechnungen ganz wie in der Ebene ausgeführt werden können.
- 3) In dem projecirten ebenen Dreieckssystem werden jetzt die Winkel nach allen Bedingungsgleichungen, welche die Beschaffenheit des Systems darbietet, ausgeglichen, und hiermit zugleich die definitive Orientirung jeder Dreiecksseite verbunden.
- 4) Hierauf werden die Dreiecksseiten und die ebenen Coordinaten der Dreieckspunkte und der Punkte untergeordneten Ranges berechnet.

Die unter 1, 3 und 4 bezeichneten Rechnungsoperationen beruhen auf bekannten Gründen. Dahingegen ist die Theorie der unter 2 genannten Projectionsmethode bislang nirgends gegeben. Die zur Anwendung derselben erforderlichen Formeln sind zwar enthalten in „Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C.

Schumacher. Herausgegeben von C. A. F. Peters. Altona. 1860⁴; jedoch finden sie sich hier ohne Herleitung (dagegen mit mehrern Druck- oder Schreibfehlern) mit ziemlich dürftiger Gebrauchsanweisung in mehrern Bänden zerstreut, und es sind nur so viele Glieder gegeben (sämmtliche Formeln sind unendliche Reihen), als zu einer nicht sehr scharfen Rechnung durchaus erforderlich. Ferner sind dieselben Formeln in übersichtlicher Zusammenstellung und mit Hinzufügung von Tafeln und Erläuterungen wiedergegeben in „Geodätische Tafeln etc. vom Wasserbau-Inspector Taaks. Aurich. 1865“, und zwar hier ohne die Druck- oder Schreibfehler, womit sie in dem Briefwechsel behaftet sind.

Ausser diesen beiden Druckschriften ist über die von Gauss angewandte Projectionsmethode Nichts veröffentlicht, noch auch hat Gauss selbst Etwas darüber hinterlassen, obgleich er viele Jahre hindurch den Vorsatz gehabt und wiederholt ausgesprochen hat, seine sämmtlichen geodätischen Messungen mit allen dabei angewandten Verfahrensarten in einem besondern Werke darzulegen.

Die vorliegende Schrift ist ein Versuch, die Gauss'sche Projectionsmethode möglichst vollständig zu entwickeln und dadurch die fühlbarste Lücke in der Kenntniss der theoretischen Grundlagen, worauf die Berechnung der Hannoverschen Landesvermessung beruht, nach Kräften auszufüllen.

Neben den oben genannten Druckschriften haben dabei ein nach Gauss' Vorträgen über höhere Geodäsie ausgearbeitetes Heft und eine Abhandlung von Gauss (Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie. Erste Abhandlung. 1843) zur Benutzung vorgelegen. Dem Hefte ist der Inhalt des nachfolgenden §. 1 entnommen, wodurch die Grundbedingungen für die Beschaffenheit der Projection vorgeschrieben werden. Im Uebrigen gehen die Aufschlüsse, welche dieses Heft über den vorliegenden Gegenstand enthält, nicht über die des genannten Briefwechsels hinaus. Die Gauss'sche Abhandlung ist mit Vortheil für die Entwicklungen der §§. 14 und 15 benutzt, indem der Artikel 12 dieser Abhandlung eine ähnliche Entwicklung für die Uebertragung der Ellipsoidfläche auf die Kugel enthält.

Endlich ist noch die in §. 4 angeführte Gauss'sche Schrift zu nennen, welche die Grundlage der ganzen Entwicklung bildet.

Die Projectionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung.

§. 1.

Grundbedingungen der Projection.

Die von Gauss gewählte Projectionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung ist eine der Mercator'schen analoge. Es treten hier jedoch zwei wesentliche Unterschiede ein. Während nämlich Mercator's Projection die Erde als Kugel voraussetzt, wird bei der Gauss'schen Projection die Erde als Revolutions-Ellipsoid angenommen. — Der zweite Unterschied besteht in Folgendem: Mercator's Projection (wenigstens im engeren Sinne) stellt den Aequator als gerade Linie dar, und zwar so, dass die Abschnitte dieser Geraden den Aequatorbögen, denen sie entsprechen, gleich sind. Dahingegen wird nach Gauss ein Meridian (der Hauptmeridian) durch eine Gerade dargestellt, deren Abschnitte den durch sie dargestellten elliptischen Meridianbögen gleich sind.

Eine Haupteigenschaft, nämlich die Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen mit dem, was sie darstellen, haben beide Projectionen mit einander gemein.

§. 2.

Coordinaten-System.

Die Messungsergebnisse sind in der angezeigten Projectionsmethode in der Form von ebenen rechtwinkligen Coordinaten einer Anzahl auf der Erde sichtbarer Punkte gegeben. Als Anfangspunkt dieser Coordinaten hat Gauss die Projection eines bestimmten Punktes am Reichenbach'schen Meridianinstrumente auf der Sternwarte zu Göttingen angenommen. Die Abscissenachse ist die Gerade, welche den durch den Anfangspunkt gehenden Meridian darstellt. Dieser Meridian wird Hauptmeridian genannt. Die Abscissen wachsen nach Süden, die Ordinaten nach Westen.

§. 3.

Erddimensionen und Constanten.

Gauss hat bei der Berechnung seiner geodätischen Messungen die Walbeck'schen Bestimmungen der Erddimensionen zu Grunde gelegt, weil diese bei Beginn der Messungen im Jahre 1821 die besten waren. Nach Walbeck ist:

$$\text{Abplattung} \dots\dots\dots \alpha = \frac{1}{302.78}$$

$$\text{Meridianquadrant} \dots\dots Q = 5130878.22 \text{ Toisen.}$$

Als Längeneinheit hat Gauss den zehnmillionsten Theil dieses Meridianquadranten angenommen und diese Länge Meter genannt.

Es folgt:

$$a = \text{halbe grosse Achse} \dots \text{in Metern: } \log a = 6.804\,5975\,970$$

$$\text{„ Toisen: } \log a = 6.514\,7893\,039$$

$$e = \text{Excentricität} \dots\dots\dots \log e^2 = 7.819\,1850\,399$$

$$\delta = \frac{e^2}{1-e^2} \dots\dots\dots \log \delta = 7.822\,0585\,008$$

Ferner ist nach Gauss:

Geographische Breite des Anfangspunktes (Göttinger Sternwarte, Reichenbach'scher Meridiankreis):

$$\varphi_0 = 51^\circ 31' 47''.85.$$

Allen numerischen Rechnungen und Tafeln sind auch hier die angegebenen Erddimensionen, und als Längeneinheit das Meter in obiger Bedeutung zu Grunde gelegt.

Es mögen hier noch die Logarithmen einiger häufig gebrauchten Constanten stehen:

$$\varrho = \text{arc. rad. in Secunden} \dots\dots\dots \log \varrho = 5.314\,4251\,332$$

$$M = \text{Modulus der briggschen Logarithmen } \log M = 9.637\,7843\,113$$

$$\log \pi = 0.497\,1498\,727$$

§. 4.

Allgemeiner Ausdruck der Conformitäts-Bedingung für Uebertragungen der Ellipsoidfläche auf die Ebene.

Gauss hat im Jahre 1822 folgende Schrift herausgegeben:

„Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird, von C. F. Gauss. — Als Beantwortung der von der königlichen Societät der Wissenschaften zu Copenhagen für 1822 aufgegebenen Preisfrage.“

Nach den in dieser Schrift festgestellten Principien hat Gauss seine Projection entwickelt. Sie wird daher auch den nachfolgenden Entwicklungen als Grundlage dienen.

Da Gauss jedoch die Hauptaufgabe in umfassendster Allgemeinheit, und den hier in Betracht kommenden speciellen Fall derselben, nämlich die Uebertragung der Ellipsoidfläche auf die Ebene, nur sehr kurz als Beispiel behandelt (siehe Art. 12.

der Gauss'schen Schrift), so mag hier direct für diese Uebertragung, jedoch im Sinne der Gauss'schen Schrift, die Auflösung der Aufgabe in soweit gegeben werden, als zur Begründung der nachfolgenden Entwicklungen erforderlich erscheint.

In einer späteren Abhandlung*) giebt Gauss solchen Abbildungen, die unter der Bedingung der Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen zwischen Original und Bild stehen, den Namen *conforme* Abbildungen oder Uebertragungen. Es wird diese Benennung (wie bereits in der Ueberschrift dieses Paragraphen geschehen) auch hier angewandt werden.

Die Bedingung der Conformität erfordert:

1. dass alle von Einem Punkte der Ellipsoidfläche ausgehende und in ihr liegende unendliche kleine Linien den ihnen entsprechenden Linien auf der Ebene proportional sind;
2. dass jene unter sich dieselben Winkel machen wie diese.

Da zufolge der ersten Bedingung jedes von unendlich kleinen Seiten gebildete Dreieck auf der Ellipsoidfläche dem entsprechenden Dreieck auf der Ebene ähnlich sein muss, so ist offenbar die zweite Bedingung schon in der ersten mit inbegriffen, und es wird nur darauf ankommen, die erste Bedingung analytisch auszudrücken.

Es bedeute:

a die grosse Halbachse und e die Excentricität der Ellipse, durch deren Umdrehung um ihre kleine Achse die ellipsoidische Fläche erzeugt wird;
 λ und φ die Länge und Breite eines unbestimmten Punktes auf dieser Fläche;
 x und y die rechtwinkligen Coordinaten des entsprechenden Punktes auf der Ebene.

Dann ist in jenem Punkte der Ellipsoidfläche der Halbmesser des Parallelkreises:

$$r = \frac{a \cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

und der Krümmungshalbmesser des Meridians:

$$R = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ein Linearelement auf der Ellipsoidfläche ist:

$$\sigma = \sqrt{r^2 d\lambda^2 + R^2 d\varphi^2} = r \sqrt{d\lambda^2 + \frac{R^2}{r^2} d\varphi^2}.$$

Setzt man zur Vereinfachung dieses Ausdrucks:

$$dq = \frac{R}{r} d\varphi = \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} d\varphi \quad **)$$

*) Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie. Erste Abhandlung. 1843.

**) Durch Integration dieser Gleichung ergibt sich der Werth von q , nämlich:

$$q = l \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{2} e l \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi}.$$

Dieser Werth selbst wird indessen in den nachfolgenden Entwicklungen nicht weiter gebraucht werden, sondern nur sein Differential dq .

so wird

$$\sigma = \frac{a \cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \sqrt{d\lambda^2 + dq^2}.$$

Das entsprechende Element auf der Ebene ist:

$$\Sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Die Bedingung der Conformität wird nun offenbar erfüllt sein, und nur dann erfüllt sein, wenn zwischen den ebenen Coordinaten x, y einerseits, und den sphäroidischen Coordinaten λ, φ andererseits eine derartige Relation festgesetzt wird, dass das Verhältniss

$$\frac{\Sigma}{\sigma} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{a \cos \varphi} \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{d\lambda^2 + dq^2}}$$

von den willkürlichen Aenderungen $d\lambda$, $d\dot{q}$ und dx , dy (welche die Richtung des betreffenden Linearelements festlegen) unabhängig ist.

Für die Ableitung dieser Relation kommt nur der Quotient

$$\frac{dx^2 + dy^2}{d\lambda^2 + dq^2}$$

in Betracht. Indem man Zähler und Nenner desselben in seine einfachen Factoren zerlegt, geht dieser über in

$$\frac{(dx + i dy)(dx - i dy)}{(d\lambda + i dq)(d\lambda - i dq)}$$

und durch Integration jedes einzelnen Factors in:

$$\frac{d(x+iy)}{d(\lambda+iq)} \frac{d(x-iy)}{d(\lambda-iq)}.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass der vorgeschriebenen Bedingung Genüge geschieht, wenn
entweder $x + iy$ eine Function von $\lambda + iq$, und $x - iy$ eine Function von $\lambda - iq$,
oder $x + iy$ „ „ „ $\lambda - iq$, „ $x - iy$ „ „ „ $\lambda + iq$,
indem dadurch die Quotienten

$$\frac{d(x+iy)}{d(\lambda+iq)} \text{ und } \frac{d(x-iy)}{d(\lambda-iq)}, \text{ oder jene: } \frac{d(x+iy)}{d(\lambda-iq)} \text{ und } \frac{d(x-iy)}{d(\lambda+iq)}$$

die Ableitungen der complexen Functionen $x + iy$ und $x - iy$

resp. nach den complexen Variabeln $\lambda + iq$ und $\lambda - iq$

oder: " " " " " $\lambda - iq$ " $\lambda + iq$,

also von den willkürlichen Aenderungen $d\lambda$, dq und dx , dy unabhängig werden.

Man sieht übrigens, dass z. B. die Bedingung

$x + iy$ Function von $\lambda + iq$
 jene: $x - iy$ „ „ $\lambda - iq$

involvirt, indem man nur $-i$ statt $+i$ zu setzen braucht, um die eine in die andere übergehn zu lassen.

Das Resultat der vorstehenden Untersuchung lässt sich hiernach folgendermaassen aussprechen:

Die Uebertragung der Ellipsoidfläche auf die Ebene ist eine conforme, wenn zwischen den sphäroidischen Coordinaten λ, φ eines unbestimmten Punktes auf der Ellipsoidfläche und den ebenen rechtwinkligen Coordinaten x, y des entsprechenden Punktes auf der Ebene eine der beiden folgenden Relationen besteht:

$$\begin{aligned} &\text{entweder: } x + iy = f(\lambda + iq) \\ &\text{oder: } x + iy = f(\lambda - iq), \end{aligned} \quad *)$$

wo f die Charakteristik einer willkürlich zu wählenden Function bedeutet und

$$dq = \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} d\varphi,$$

also:

$$q = l \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{2} e l \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi}$$

ist.

Anmerkung. Ein paar Beispiele werden den Gebrauch dieser Formeln sofort in das gehörige Licht setzen.

Die gefundenen Resultate gelten unmittelbar für conforme Uebertragungen der Kugelfläche, wenn man in dem Werthe von q , $e = 0$ setzt. Dadurch wird:

$$q = l \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Wählt man nun z. B. für f eine lineäre Function, indem man setzt:

$$f(v) = av,$$

so erhält man für die Kugel

$$x + iy = a\lambda + ial \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Da nun x dem reellen und iy dem imaginären Theile dieses Ausdrucks gleich sein muss, so kommt:

$$x = a\lambda, \quad y = al \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Durch diese Relationen wird das Bild eines jeden Punktes, dessen Lage auf der Kugel durch Länge und Breite gegeben ist, auf der Ebene durch die rechtwinkligen Coordinaten x und y festgelegt. Man überzeugt sich leicht, dass diese Relationen der analytische Ausdruck für Mercator's Projection sind.

Für die Ellipsoidfläche liefert dieselbe Bestimmung von f eine analoge Projection. Man erhält:

$$x = a\lambda, \quad y = al \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{2} ael \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi}.$$

Es wird auch hier der Aequator durch die x -Achse und die Meridiane durch Parallelen zur y -Achse dargestellt.

Die stereographische Projection, die bekanntlich auch eine conforme ist, erhält man, wenn man setzt:

$$f(v) = ae^{iv},$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Es wird dadurch für die Kugel:

*) Auch die Umkehrung dieses Satzes, nämlich dass alle conformen Uebertragungen der Ellipsoidfläche auf die Ebene unter einer dieser beiden Bedingungen stehn, lässt sich nicht unschwer erweisen. Es würde zu diesem Ende nur noch darzulegen sein, dass der Quotient:

$$\frac{dx^2 + dy^2}{d\lambda^2 + dq^2} \quad \text{oder} \quad \frac{(dx + idy)(dx - idy)}{(d\lambda + idq)(d\lambda - idq)}$$

nur dann von den willkürlichen Aenderungen $d\lambda, dq$ und dx, dy unabhängig ist, wenn eine jener beiden Bedingungen erfüllt wird. Dieser Beweis mag hier jedoch übergangen werden, da er zur Begründung der nachfolgenden Entwicklungen nicht erforderlich ist.

$$x = a \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \cos \lambda, \quad y = a \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \sin \lambda.$$

Der Augenpunkt ist hier (im Sinne der bekannten geometrischen Construction) im Südpol anzunehmen. *)

Für die Ellipsoidfläche erhält man:

$$x = a \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)^{\frac{1}{2}e} \cos \lambda; \quad y = a \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)^{\frac{1}{2}e} \sin \lambda,$$

welches eine der stereographischen analoge Projection ist, indem, wie auf der Kugel, die Meridiane durch gerade Linien, und die Parallelen durch Kreise dargestellt werden, wovon man sich am leichtesten überzeugt, wenn man aus den beiden Gleichungen für x und y einmal φ und einmal λ eliminirt.

Die Bestimmung der Function f behuf Herleitung einer Projection, für welche neben der Conformitätsbedingung noch andere Bedingungen vorgeschrieben sind, ist häufig mit Schwierigkeiten verknüpft und, namentlich für die Ellipsoidfläche, in geschlossener Form oft unmöglich. Man kann in solchen Fällen den unbestimmten Ausdruck $f(\lambda + iq)$ nach dem Taylor'schen Satze in eine Reihe nach λ oder nach einer zweckmässig gewählten Function von φ entwickeln, x dem reellen und iy dem imaginären Theile dieser Reihe gleichsetzen, und sodann die durch Anwendung des Taylor'schen Satzes eingeführten Differentialquotienten aus den für die Projection vorgeschriebenen Bedingungen bestimmen. — Dieser Weg soll auch nachstehend eingeschlagen werden.

§. 5.

Berechnung der Coordinaten aus Länge und Breite.

Nach dem in den §§. 1 und 2 Gesagten sind die Bedingungen der Projection der Hannoverschen Landesvermessung folgende:

- 1) Die Projection soll eine conforme sein.
- 2) Die x -Achse soll den Hauptmeridian darstellen und zwar derart, dass jeder auf ihr genommene Abschnitt dem elliptischen Bogen, dessen Bild er ist, an Länge gleich ist. x soll nach Süden, y nach Westen zunehmen.
- 3) Der Anfangspunkt der x und y soll dem Punkte des Hauptmeridians von der Breite φ_0 entsprechen.

Nach dem vorigen Paragraphen wird die erste Bedingung ausgedrückt durch die Gleichungen:

- 1) $\dots\dots\dots x + iy = f(\lambda + iq),$
- 2) $\dots\dots\dots dq = \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} d\varphi.$

Die Länge λ möge vom Hauptmeridian aus gegen Westen gezählt werden.

Für die Entwicklung des Ausdrucks $f(\lambda + iq)$ in eine nach Potenzen von λ fortschreitende Reihe ist es bequemer, statt der ersten Gleichung die folgende zu setzen:

- 3) $\dots\dots\dots x + iy = f(q - i\lambda).$

Da $q - i\lambda$ eine Function von $\lambda + iq$, so ist diese Aenderung offenbar erlaubt.

Bezeichnet man mit s den Werth von x für $\lambda = 0$, d. i. für den Punkt des

*) Allgemein ist für die stereographische Projection zu setzen:

$$f(v) = \operatorname{tg} \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{iv} - \left(45^\circ - \frac{\varphi_0}{2} \right) \right] = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left[\varphi_0 + i \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{v}{2} \right) \right],$$

wo φ_0 die Breite des dem Augenpunkte diametral gegenüber liegenden Punktes, d. i. des Anfangspunktes der Coordinaten x, y bedeutet.

Hauptmeridians, der die Breite φ hat, so giebt die Entwicklung von $f(q - i\lambda)$ nach dem Taylor'schen Satze, indem zugleich x dem reellen und iy dem imaginären Theile gleich gesetzt wird:

$$4) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} x = s - \frac{\lambda^2}{2} \frac{d^2 s}{dq^2} + \frac{\lambda^4}{24} \frac{d^4 s}{dq^4} - \frac{\lambda^6}{720} \frac{d^6 s}{dq^6} + \dots \\ y = -\lambda \frac{ds}{dq} + \frac{\lambda^3}{6} \frac{d^3 s}{dq^3} - \frac{\lambda^5}{120} \frac{d^5 s}{dq^5} + \dots \end{array} \right.$$

Da s die Abscisse desjenigen Punktes der x -Achse ist, dem auf dem Ellipsoid der Punkt des Hauptmeridians von der Breite φ entspricht, und zufolge der 2. Bedingung diese Abscisse den elliptischen Meridianbogen vom Anfangspunkte bis zur Breite φ darstellen und ihm an Länge gleich sein soll, so ist aus bekannten Gründen (mit Berücksichtigung, dass s abnimmt bei wachsendem φ):

$$ds = - \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi,$$

wo a die grosse Halbachse der Meridianellipse bezeichnet.

Diese Gleichung giebt in Verbindung mit jener 2) den Differentialquotienten:

$$\frac{ds}{dq} = - \frac{a \cos \varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

und hieraus folgen durch wiederholtes Differentiiren und jedesmalige Division durch dq die übrigen successiven Differentialquotienten. Es ist jedoch für die Einfachheit der nachfolgenden Entwicklungen vortheilhafter, zuvor statt e^2 eine andere Grösse δ einzuführen, welche durch die Relation

$$e^2 = \frac{\delta}{1+\delta} \quad \text{oder} \quad \delta = \frac{e^2}{1-e^2}$$

bestimmt wird. Dadurch wird:

$$1 - e^2 = \frac{1}{1+\delta} \quad \text{und} \quad 1 - e^2 \sin^2 \varphi = \frac{1 + \delta \cos^2 \varphi}{1+\delta},$$

und ferner:

$$ds = - \frac{a \sqrt{1+\delta}}{(1+\delta \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi$$

$$dq = \frac{d\varphi}{(1+\delta \cos^2 \varphi) \cos \varphi}.$$

Für die Differentialquotienten in den Reihen 4) ergeben sich hieraus folgende Werthe:

$$5) \dots \left\{ \begin{aligned} \frac{ds}{dq} &= -a \cos \varphi \sqrt{\frac{1+\delta}{1+\delta \cos \varphi^2}} \\ \frac{d^2 s}{dq^2} &= +a \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{\frac{1+\delta}{1+\delta \cos \varphi^2}} \\ \frac{d^3 s}{dq^3} &= -a \cos \varphi \sqrt{\frac{1+\delta}{1+\delta \cos \varphi^2}} [1 - 2 \cos \varphi^2 - \delta \cos \varphi^4] \\ \frac{d^4 s}{dq^4} &= +a \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{\frac{1+\delta}{1+\delta \cos \varphi^2}} [1 - 6 \cos \varphi^2 - 9 \delta \cos \varphi^4 - 4 \delta^2 \cos \varphi^6] \\ \frac{d^5 s}{dq^5} &= -a \cos \varphi \sqrt{\frac{1+\delta}{1+\delta \cos \varphi^2}} [1 - 20 \cos \varphi^2 + (24 - 58 \delta) \cos \varphi^4 \\ &\quad + (72 \delta - 64 \delta^2) \cos \varphi^6 + (77 \delta^2 - 24 \delta^3) \cos \varphi^8 + 28 \delta^3 \cos \varphi^{10}] \\ \frac{d^6 s}{dq^6} &= +a \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{\frac{1+\delta}{1+\delta \cos \varphi^2}} [1 - 60 \cos \varphi^2 + (120 - 330 \delta) \cos \varphi^4 \\ &\quad + (600 \delta - 680 \delta^2) \cos \varphi^6 + (1125 \delta^2 - 600 \delta^3) \cos \varphi^8 \\ &\quad + (924 \delta^3 - 192 \delta^4) \cos \varphi^{10} + 280 \delta^4 \cos \varphi^{12}]. \end{aligned} \right.$$

Durch Substitution dieser Werthe gehen die Reihen 4) in folgende über:

$$6) \dots \left\{ \begin{aligned} x &= s - \frac{a \sin \varphi \cos \varphi}{2} \sqrt{\frac{1+\delta}{1+\delta \cos \varphi^2}} \lambda^2 \\ &\quad + \frac{a \sin \varphi \cos \varphi}{24} \sqrt{\frac{1+\delta}{1+\delta \cos \varphi^2}} [1 - 6 \cos \varphi^2 - 9 \delta \cos \varphi^4 - 4 \delta^2 \cos \varphi^6] \lambda^4 \\ &\quad - \frac{a \sin \varphi \cos \varphi}{720} \sqrt{\frac{1+\delta}{1+\delta \cos \varphi^2}} [1 - 60 \cos \varphi^2 + (120 - 330 \delta) \cos \varphi^4 \\ &\quad + (600 \delta - 680 \delta^2) \cos \varphi^6 + (1125 \delta^2 - 600 \delta^3) \cos \varphi^8 \\ &\quad + (924 \delta^3 - 192 \delta^4) \cos \varphi^{10} + 280 \delta^4 \cos \varphi^{12}] \lambda^6 + \dots \\ y &= a \cos \varphi \sqrt{\frac{1+\delta}{1+\delta \cos \varphi^2}} \lambda - \frac{a \cos \varphi}{6} \sqrt{\frac{1+\delta}{1+\delta \cos \varphi^2}} [1 - 2 \cos \varphi^2 - \delta \cos \varphi^4] \lambda^3 \\ &\quad + \frac{a \cos \varphi}{120} \sqrt{\frac{1+\delta}{1+\delta \cos \varphi^2}} [1 - 20 \cos \varphi^2 + (24 - 58 \delta) \cos \varphi^4 \\ &\quad + (72 \delta - 64 \delta^2) \cos \varphi^6 + (77 \delta^2 - 24 \delta^3) \cos \varphi^8 + 28 \delta^3 \cos \varphi^{10}] \lambda^5 - \dots \end{aligned} \right.$$

Diese Formeln geben x und y in demselben Längenmaasse, worin a ausgedrückt ist. Für die Länge λ ist der dem Halbmesser gleiche Bogen als Einheit vorausgesetzt. *)

In der Formel für x bedeutet s den elliptischen Meridianbogen vom Anfangspunkte bis zur Breite φ . Jenachdem dieser Bogen vom Anfangspunkte aus nach Süden oder nach Norden sich erstreckt, ist s positiv oder negativ.

*) Vergl. Briefwechsel etc. Bd. II., S. 259.

Anmerkung. Ueber die Bedeutung der Function f in der Gleichung $x + iy = f(q - i\lambda)$, welche in der vorstehenden Entwicklung nicht unmittelbar hervortritt, werde Folgendes bemerkt. Für $\lambda = 0$ wird $y = 0$ und $x = s$, folglich ist:

$$s = f(q).$$

Der Einfachheit wegen möge nun bis auf Weiteres der Anfangspunkt der Coordinaten im Aequator angenommen, also $\varphi_0 = 0$ gesetzt werden. Dann bedeutet s oder $f(q)$ den elliptischen Meridianbogen vom Aequator bis zur Breite φ , diesen Bogen, wie x , nach Süden positiv und nach Norden negativ gezählt. Mithin stellt allgemein $f(w)$ den zwischen dem Aequator und der Breite β enthaltenen Meridianbogen dar, wobei (analog der im vorigen Paragraphen gegebenen Relation zwischen q und φ) zwischen w und β der Zusammenhang

$$a) \dots \dots \dots w = l \operatorname{tg} (45^\circ + \tfrac{1}{2} \beta) + \tfrac{1}{2} e l \frac{1 - e \sin \beta}{1 + e \sin \beta}$$

besteht. Es folgt hieraus zunächst, dass f eine elliptische Function und in geschlossener Form nicht darstellbar ist.

Aus dem oben gegebenen Werthe von $\frac{ds}{dq}$ oder $\frac{d \cdot f(q)}{dq}$ folgt, wenn man w und β statt q und φ schreibt:

$$b) \dots \dots \dots f(w) = -a \int_0^w \frac{\cos \beta}{(1 - e^2 \sin^2 \beta)^{\frac{1}{2}}} dw.$$

Entwickelt man $\frac{\cos \beta}{(1 - e^2 \sin^2 \beta)^{\frac{1}{2}}}$ in eine nach Potenzen von w fortschreitende Reihe und integrirt, so wird

$f(w)$ in der Form einer Reihe nach w dargestellt sein. Man kann aber mit Hülfe der ausgeführten Entwicklungen diese Reihe einfacher erhalten.

Für $\varphi = 0$ wird nämlich $q = 0$ und $x = 0$, mithin

$$iy_0 = f(-i\lambda),$$

wo y_0 den Werth von y für $\varphi = 0$ bezeichnet. Aus der untern Reihe 6) erhält man:

$$y_0 = a \left[\lambda + \frac{1+\delta}{6} \lambda^3 + \frac{(5+4\delta)(1+\delta)^2}{120} \lambda^5 + \dots \right]$$

oder

$$iy_0 = -a \left[(-i\lambda) - \frac{1+\delta}{6} (-i\lambda)^3 + \frac{(5+4\delta)(1+\delta)^2}{120} (-i\lambda)^5 - \dots \right].$$

Die Vergleichung dieser beiden Werthe von iy_0 ergiebt die Reihenentwicklung der Function f . Es ist nämlich (zwei Glieder weiter entwickelt):

$$f(w) = -aw \left[1 - \frac{1+\delta}{2 \cdot 3} w^2 + \frac{(5+4\delta)(1+\delta)^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} w^4 - \frac{(61+148\delta+88\delta^2)(1+\delta)^3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 7} w^6 + \frac{(1385+6744\delta+10032\delta^2+4671\delta^3)(1+\delta)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 9} w^8 - \dots \right]$$

Zufolge der Bedeutung von $f(w)$ giebt diese Reihe den elliptischen Meridianbogen vom Aequator bis zur Breite β . Will man diesen Bogen, wie sonst gebräuchlich, nach Norden positiv zählen, so ist das Vorzeichen der Reihe in das entgegengesetzte, also in $+$ zu verwandeln. Den Werth von w giebt die Gleichung a).

Die vorstehenden Ergebnisse sind nun leicht auf den Fall anzuwenden, wo der Anfangspunkt der Coordinaten nicht im Aequator, sondern auf dem Parallel von der Breite φ_0 liegt. Es bedeutet dann allgemein $f(w)$ den Meridianbogen, welcher zwischen der festen Breite φ_0 und der unbestimmten Breite β enthalten ist, wobei zwischen w und β die Relation a) besteht. Der Ausdruck b) geht über in

$$f(w) = -a \int_{w_0}^w \frac{\cos \beta}{(1 - e^2 \sin^2 \beta)^{\frac{1}{2}}} dw = a \int_0^{w_0} \frac{\cos \beta}{(1 - e^2 \sin^2 \beta)^{\frac{1}{2}}} dw - a \int_0^w \frac{\cos \beta}{(1 - e^2 \sin^2 \beta)^{\frac{1}{2}}} dw,$$

wo w_0 den Werth von w für $\beta = \varphi_0$ bedeutet. Das erste Integral stellt den Meridianbogen vom Aequator bis zur Breite φ_0 dar, diesen Bogen nach Norden positiv gezählt. Bezeichnet man diesen Bogen mit S_0 , so ist also:

$$f(w) = S_0 - a \int_0^w \frac{\cos \beta}{(1 - e^2 \sin^2 \beta)^{\frac{1}{2}}} dw,$$

oder in Reihenform:

$$f(w) = S_0 - aw \left[1 - \frac{1+\delta}{6} w^2 + \frac{(5+4\delta)(1+\delta)^2}{120} w^4 - \dots \right].$$

Es ist hiermit zugleich die Function von

$$v = \lambda + iq$$

bestimmt, welcher $x + iy$ gleich zu setzen ist, um die vorliegende Projection zu erhalten. Da nämlich:

$$x + iy = f(q - i\lambda) = f(-iv),$$

so folgt, indem man in der eben gegebenen Reihe $-iv$ statt w setzt:

$$c) \dots \dots \dots x + iy = S_0 + iav \left[1 + \frac{1+\delta}{6} v^2 + \frac{(5+4\delta)(1+\delta)^2}{120} v^4 + \dots \right]$$

Auf die Kugel angewandt, wo $e = \delta = 0$ ist, hat man zufolge der Bedeutung von $f(w)$:

$$f(w) = a(\varphi_0 - \beta) \text{ und } w = l \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}\beta).$$

Aus letzterer Gleichung folgt:

$$\beta = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^v - \frac{\pi}{2},$$

mithin:

$$f(w) = a \left[\varphi_0 + \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^v \right].$$

Setzt man hierin $-iv$ statt w , so wird wegen $f(-iv) = x + iy$:

$$x + iy = a \left[\varphi_0 + \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{-iv} \right], \text{ wo } v = \lambda + iq = \lambda + il \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Dieser Ausdruck ist wegen der allgemeinen Relation:

$$\frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{i\eta} = il \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\eta}{2} \right)$$

identisch mit dem folgenden:

$$d) \dots \dots \dots x + iy = a\varphi_0 - ial \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{v}{2} \right) = a\varphi_0 + ial \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{v}{2} \right).$$

Die Reihe c) dahingegen giebt:

$$x + iy = a\varphi_0 + iav \left[1 + \frac{v^2}{6} + \frac{v^4}{24} + \frac{61v^6}{2 \cdot 3 \dots 7} + \frac{1385v^8}{2 \cdot 3 \dots 9} + \dots \right].$$

Durch Entwicklung von $l \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{v}{2} \right) = \frac{1}{2} l (1 + \sin v) - \frac{1}{2} l (1 - \sin v)$ in eine Reihe nach v überzeugt man sich leicht, dass beide Ausdrücke mit einander übereinstimmen.

Das in der Gleichung d) enthaltene Resultat lässt sich in Worten so aussprechen:

Man erhält für die Kugel eine Projection, die der vorliegenden für das Ellipsoid analog ist, wenn man x dem reellen und iy dem imaginären Theile von

$$a\varphi_0 + ial \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{v}{2} \right)$$

gleich setzt, wo

$$v = \lambda + il \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

ist.

§. 6.

Fortsetzung. Berechnung elliptischer Meridianbögen aus den Breiten ihrer Endpunkte.

Die numerische Berechnung von s aus φ kann nach den bekannten Rectificationsformeln für elliptische Bögen geschehn. Weit bequemer ist es jedoch, eine zweckmässig eingerichtete Hilfstafel dabei anzuwenden. Zu einer solchen gelangt man auf folgende Weise:

Es werde die Breite ψ' auf einer Kugel gezählt, die gleichen Meridianumfang mit dem Ellipsoid hat, und es seien die Meridianbögen zwischen dem Aequator und den Breiten φ und ψ' resp. auf dem Ellipsoid und der Kugel von gleicher Länge. Aus einer bekannten Reihe findet man dann leicht die folgende Reihe für die Differenz $\varphi - \psi'$:

$$7) \dots \varphi - \psi' = \alpha \sin 2\varphi - \alpha_1 \sin 4\varphi + \alpha_2 \sin 6\varphi - \dots^*)$$

*) Vergl. Briefwechsel, Bd. III, S. 209 und Bd. II, S. 232, wo die Umkehrung der obigen Reihe und eine darnach berechnete Tafel gegeben ist (siehe §. 9). An ersterer Stelle steht jedoch irrthümlich $\cos$ statt $\sin$.

Die Herleitung der Reihe 7) kann, wie folgt, geschehn:

Die Länge des elliptischen Meridianbogens vom Aequator bis zur Breite φ wird bekanntlich ausgedrückt durch:

$$S = a (1 - e^2) \int_0^\varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi^2)^{-\frac{3}{2}} d\varphi.$$

In eine Reihe entwickelt ist der Ausdruck unterm Integralzeichen:

$$(1 - e^2 \sin^2 \varphi^2)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \varphi^2 + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} e^4 \sin^4 \varphi^2 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \sin^6 \varphi^2 + \dots$$

Verwandelt man die Potenzen der Sinus in die Cosinus der geraden Vielfachen von φ , multiplicirt mit $1 - e^2$ und integrirt, so kommt:

$$S = a [A\varphi - A_1 \sin 2\varphi + A_2 \sin 4\varphi - \dots],$$

worin, wenn man zur Vermeidung von Brüchen $\varepsilon = \frac{1}{2}e$ setzt, die Coefficienten folgende Werthe haben:

$$\begin{aligned} A &= 1 - 4\varepsilon^2 - 12\varepsilon^4 - 80\varepsilon^6 - 700\varepsilon^8 - 7056\varepsilon^{10} - 77616\varepsilon^{12} - \dots \\ A_1 &= \dots 6\varepsilon^2 + 24\varepsilon^4 + 180\varepsilon^6 + 1680\varepsilon^8 + 17640\varepsilon^{10} + 199584\varepsilon^{12} + \dots \\ A_2 &= \dots 15\varepsilon^4 + 180\varepsilon^6 + 2100\varepsilon^8 + 25200\varepsilon^{10} + 311850\varepsilon^{12} + \dots \\ A_3 &= \dots \frac{140}{3}\varepsilon^6 + \frac{2800}{3}\varepsilon^8 + 14700\varepsilon^{10} + 215600\varepsilon^{12} + \dots \\ A_4 &= \dots \frac{315}{2}\varepsilon^8 + 4410\varepsilon^{10} + 87318\varepsilon^{12} + \dots \\ A_5 &= \dots \frac{5544}{10}\varepsilon^{10} + \frac{199584}{10}\varepsilon^{12} + \dots \\ A_6 &= \dots 2002\varepsilon^{12} + \dots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Setzt man in dieser Formel $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so erhält man die Länge des Meridianquadranten:

$$Q = \frac{1}{2} a \pi A.$$

Der Halbmesser eines Kreises, dessen Umfang dem Umfange des elliptischen Meridians gleich ist, ist daher:

$$\frac{2Q}{\pi} = aA.$$

Folglich ist der Bogen ψ' dieses Kreises, der mit dem elliptischen Bogen S gleiche Länge hat:

$$\psi' = \frac{S}{aA}, \text{ oder in Secunden: } \psi' = \frac{\varrho S}{aA}.$$

Setzt man hierin für S den eben abgeleiteten Werth, so erhält man die obige Reihe 7).

worin, wenn zur Vermeidung von Brüchen $\varepsilon = \frac{1}{4} e$ gesetzt wird, die Coefficienten folgende Werthe haben:

$$\alpha = \varrho \left[6 \varepsilon^2 + 48 \varepsilon^4 + 444 \varepsilon^6 + 4512 \varepsilon^8 + 49056 \varepsilon^{10} + 561408 \varepsilon^{12} + \dots \right]$$

$$\alpha_1 = \dots \varrho \left[15 \varepsilon^4 + 240 \varepsilon^6 + 3240 \varepsilon^8 + 42240 \varepsilon^{10} + 549390 \varepsilon^{12} + \dots \right]$$

$$\alpha_2 = \dots \varrho \left[\frac{140}{3} \varepsilon^6 + 1120 \varepsilon^8 + 19740 \varepsilon^{10} + \frac{935200}{3} \varepsilon^{12} + \dots \right]$$

$$\alpha_3 = \dots \varrho \left[\frac{315}{2} \varepsilon^8 + 5040 \varepsilon^{10} + 109368 \varepsilon^{12} + \dots \right]$$

$$\alpha_4 = \dots \varrho \left[\frac{5544}{10} \varepsilon^{10} + 22176 \varepsilon^{12} + \dots \right]$$

$$\alpha_5 = \dots \varrho \left[2002 \varepsilon^{12} + \dots \right]$$

etc.

Hierin ist $\varrho = \text{arc. rad.}$ in Graden, Minuten oder Secunden zu setzen, je nachdem man die Differenz $\varphi - \psi'$ in Graden, Minuten oder Secunden erhalten will.

Es sei nun ψ_0' die der Breite φ_0 des Anfangspunktes entsprechende Kugelbreite, die man aus obiger Reihe erhält, wenn man darin $\varphi = \varphi_0$ setzt. Dann wird der zwischen den Breiten φ_0 und φ enthaltene Meridianbogen s auf dem Ellipsoid jenem zwischen den Breiten ψ_0' und ψ' enthaltenen Meridianbogen auf der Kugel gleich sein.

Es ist für die Rechnung bequem, wenn die dem Anfangspunkte entsprechende Kugelbreite eine runde Zahl und die Differenz $\psi' - \varphi$ positiv ist. Aus diesem Grunde setze man:

$$\psi = \psi' + \nu,$$

folglich:

$$8) \dots \psi - \varphi = \nu - \alpha \sin 2 \varphi + \alpha_1 \sin 4 \varphi - \alpha_2 \sin 6 \varphi + \dots$$

und gebe ν den constanten Werth, der aus dieser Reihe für $\varphi = \varphi_0$ folgt, nämlich:

$$\nu = \psi_0 - \varphi_0 + \alpha \sin 2 \varphi_0 - \alpha_1 \sin 4 \varphi_0 + \alpha_2 \sin 6 \varphi_0 - \dots *)$$

worin für die dem Anfangspunkte entsprechende Kugelbreite ψ_0 eine passende runde Zahl zu setzen ist.

Der elliptische Meridianbogen s zwischen den Breiten φ_0 und φ wird jetzt dem kreisförmigen zwischen den Breiten ψ_0 und ψ gleich sein.

Nach der Reihe 8) ist eine Tafel zu berechnen, welche die Differenz $\psi - \varphi$ für das Argument φ giebt. Wenn letzteres mit Intervallen von $1'$ oder $10'$ fortschreitet, so ist es am vortheilhaftesten, die Differenz $\psi - \varphi$ in Minuten zu erhalten.

*) Durch Substitution dieses Werthes von ν in der Reihe 8) erhält diese, wenn man zugleich die Differenzen der Sinus in Producte verwandelt, folgende Gestalt:

$$\psi - \varphi = (\psi_0 - \varphi_0) - 2 \alpha \sin(\varphi - \varphi_0) \cos(\varphi + \varphi_0) + 2 \alpha_1 \sin 2(\varphi - \varphi_0) \cos 2(\varphi + \varphi_0) - 2 \alpha_2 \sin 3(\varphi - \varphi_0) \cos 3(\varphi + \varphi_0) + \dots$$

Die Differenz $\psi - \varphi$ zu dem gegebenen φ addirt, giebt ψ und hieraus bestimmt man s wie folgt:

Bezeichnet Q die Länge des Meridianquadranten, so ist die Länge einer Minute des Kugelmeridians:

$$\sigma = \frac{Q}{90 \times 60} = \frac{Q}{5400}$$

und mithin:

$$s = \sigma (\psi_0 - \psi) = \frac{Q}{5400} (\psi_0 - \psi),$$

wo $\psi_0 - \psi$ in Minuten ausgedrückt sein muss.

Mit Zugrundelegung der numerischen Werthe des §. 3 ergibt sich in Minuten:

$\log \alpha = 0.930\ 9252\ 8705$	$\alpha = 8.52953\ 3653$
$\log \alpha_1 = 7.945\ 3657\ 5$	$\alpha_1 = 0.00881\ 7912$
$\log \alpha_2 = 5.054\ 78$	$\alpha_2 = 0.00001\ 1344$
$\log \alpha_3 = 2.1996$	$\alpha_3 = 0.00000\ 0016$
$\log \alpha_4 = 9.3625$	etc.
etc.	

Für ψ_0 wählt man hier am besten die auf φ_0 folgende volle Gradzahl, also da $\varphi_0 = 51^\circ 31' 47''.85$:

$$\psi_0 = 52^\circ.$$

Darnach bestimmt sich der Werth von ν :

$$\nu = 36'.515284\ 498.$$

Da $Q = 10\,000\,000^m$, so ist ferner:

$$s = \frac{10^5}{54} (\psi_0 - \psi) \text{ Meter, wenn } \psi_0 - \psi \text{ in Minuten ausgedrückt ist;}$$

$$s = \frac{10^6}{9} (\psi_0 - \psi) \quad , \quad , \quad , \quad , \quad \text{Graden} \quad , \quad , \quad ,$$

Die Tafel I. *) enthält für den Meridianbogen von 50° bis 55° in der ersten Columnne das mit Intervallen von 10 Minuten fortschreitende Argument φ , und in der zweiten Columnne die nach der Reihe 8) berechneten Werthe von $\psi - \varphi$. In der dritten Columnne sind die Differenzen angegeben. Beim Interpoliren ist auch die zweite Differenz zu berücksichtigen, die innerhalb des Umfangs der Tafel zwischen $+285$ und $+272$ liegt. Die Correction wegen der zweiten Differenz ist nach der Formel:

$$-\frac{1}{2} n (10 - n) \frac{\Delta''}{100}$$

zu berechnen, wo n die Einer nebst Decimalstellen der Minuten von φ , und $\mathcal{A}''$ die zweite Differenz bedeutet. Um die Berechnung dieser Correction zu erleichtern, ist eine kleine Hülftafel beigelegt, welche die Werthe des Coefficienten $\frac{1}{2}n(10 - n)$ enthält. Für den Gebrauch derselben ist nur zu bemerken, dass der linke und obere, sowie der rechte und untere Eingang zusammen gehören.

*) Die Tafeln finden sich am Schlusse dieses Bandes.

Bei einem Intervall des Arguments φ von 1 Minute würde die zweite Differenz ganz unberücksichtigt bleiben können.

Das folgende Beispiel möge die gegebenen Vorschriften erläutern:

$$\begin{aligned}\varphi &= 50^0 \ 7' \ 23''.3877 \\ &= 50^0 \ 7'.389795 \\ \psi - \varphi &= 28'.118702 \\ \psi &= 50^0 \ 35'.508497\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_0 - \psi &= +1^0 \ 24'.491503 \\ &= +1^0.40819172 \\ s &= +156465^m.747\end{aligned}$$

Anmerkung. Die Bequemlichkeit der Rechnung wird bedeutend verringert, sobald man statt des Gauss'schen Meter irgend ein anderes gebräuchliches Längenmaass zu Grunde legt, indem dann der Factor σ eine aus vielen Ziffern bestehende Zahl wird. Gauss führt in dem mehrerwähnten Briefwechsel (Bd. II., S. 232) diesen Umstand als einen Grund für die Wahl seiner Lineareinheit an.

Indessen wird auch bei Anwendung einer beliebigen Lineareinheit eine ähnlich construirte Hülfs-tafel mit Vortheil zu benutzen sein, denn es ist für den bequemen Gebrauch einer solchen, so lange sie nur einen Theil des Meridianquadranten umfasst, nicht erforderlich, dass die Hülfsbreite ψ auf einer Kugel gezählt werde, die mit dem Ellipsoid gleichen Meridianumfang hat, sondern man kann vielmehr für die Länge σ einer Secunde, einer Minute oder eines Grades des Kugelmeridians eine Zahl annehmen, die eine leichte Multiplication gestattet und darnach die Reihe 8) umformen. Bei der Wahl dieser Länge ist übrigens zu berücksichtigen, dass sie von der mittlern Länge, die sich aus dem von der Tafel umfassten elliptischen Meridianbogen für eine Secunde etc. ergibt, nur wenig verschieden sein darf, weil sonst die Differenzen der auf einander folgenden Werthe von $\psi - \varphi$ zu gross werden.

Es sei σ_1 eine so gewählte Zahl und ψ_1 die auf der entsprechenden Kugel gezählte Breite. Dann ist:

$$s = \sigma_1 (\psi_0 - \psi_1).$$

Für eine Kugel, die mit dem Ellipsoid gleichen Meridianumfang hat, sei wie oben:

$$s = \sigma (\psi_0 - \psi).$$

Dann hat man:

$$\sigma_1 (\psi_0 - \psi_1) = \sigma (\psi_0 - \psi),$$

woraus:

$$\psi_1 - \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma_1} (\psi_0 - \varphi) + \frac{\sigma}{\sigma_1} (\psi - \varphi).$$

Substituirt man hierin für $\psi - \varphi$ die Reihe 8), so erhält man unter Berücksichtigung des Werthes von ν :

$$\begin{aligned}\psi_1 - \varphi &= (\psi_0 - \varphi_0) + \frac{\sigma}{\sigma_1} \left[\alpha \sin 2 \varphi_0 - \alpha_1 \sin 4 \varphi_0 + \alpha_2 \sin 6 \varphi_0 - \dots \right] \\ &\quad - \frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma_1} (\varphi - \varphi_0) - \frac{\sigma}{\sigma_1} \left[\alpha \sin 2 \varphi - \alpha_1 \sin 4 \varphi + \alpha_2 \sin 6 \varphi - \dots \right]\end{aligned}$$

oder auch:

$$\begin{aligned}\psi_1 - \varphi &= (\psi_0 - \varphi_0) - \frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma_1} (\varphi - \varphi_0) - \frac{2\sigma}{\sigma_1} \left[\alpha \sin (\varphi - \varphi_0) \cos (\varphi + \varphi_0) \right. \\ &\quad \left. - \alpha_1 \sin 2 (\varphi - \varphi_0) \cos 2 (\varphi + \varphi_0) \right. \\ &\quad \left. + \alpha_2 \sin 3 (\varphi - \varphi_0) \cos 3 (\varphi + \varphi_0) - \dots \right]\end{aligned}$$

In diesen Formeln kann für die dem Anfangspunkte entsprechende Kugelbreite ψ_0 ein beliebiger Werth angenommen werden.

Zur Erläuterung diene die Einrichtung einer den Meridianbogen von 50^0 bis 55^0 umfassenden Hülftafel für den Gebrauch der Toise als Längeneinheit. Aus den Walbeck'schen Bestimmungen ergibt sich die Länge des elliptischen Meridianbogens von 50^0 bis 55^0 :

$$= 285411.8... \text{ Toisen,}$$

also die mittlere Länge einer Minute dieses Bogens:

$$\frac{285411.8...}{5 \times 60} = 951.37... \text{ Toisen}$$

Man kann daher setzen: $\sigma_1 = 950 = 1000 - \frac{100}{2}$, welche Zahl eine sehr bequeme Ausführung der

Multiplication $\sigma_1 (\psi_0 - \psi_1)$ gestattet. Auch der reciproke Werth $\frac{1}{951.37...} = 0.0010511... \text{ liefert}$

einen brauchbaren Werth für σ_1 , nämlich $\sigma_1 = \frac{10^5}{105} = \frac{2}{3 \times 7} \cdot 10^4$, der sich besonders für die Umkehrung der vorliegenden Aufgabe (vergl. §. 9 Anmerk.) empfiehlt, wo die Multiplication mit $\frac{1}{\sigma_1}$ auszuführen ist.

Es möge hier der erstere Werth:

$$\sigma_1 = 950$$

beibehalten werden. Man findet ferner (siehe §. 3):

$$\sigma = \frac{5130878.22}{90 \times 60} = 950^t.1626333... \text{ und } \frac{\sigma}{\sigma_1} = 1.00017119298$$

und mit Beibehaltung der Werthe:

$$\varphi_0 = 51^0 31' 47''.85 \text{ und } \psi_0 = 52^0$$

aus einer der beiden obigen Reihen:

φ	$\psi_1 - \varphi$	Diff.
$50^0 0'$	28'.096597	10376
10	106973	10661
20	117634	10945
30	128579	11228
40	139807	11512
50	151319	11796
51 0	163115	

Die Bogenlänge s in Toisen ergibt sich aus der Gleichung:

$$s = 950 (52^0 - \psi_1),$$

wo $52^0 - \psi_1$ in Minuten ausgedrückt sein muss.

Die im obigen Beispiel in Metern durchgeführte Rechnung ist hiernach in Toisen die folgende:

$$\begin{aligned} \varphi &= 50^0 7' 23''.3877 \\ &= 50^0 7'.389795 \\ \psi_1 - \varphi &= 28'.104237 \\ \psi_1 &= 50^0 35'.494032 \\ 52^0 - \psi_1 &= + 1^0 24'.505968 \\ &= + 84'.505968 \\ &\quad - 4225298 \\ s &= + 80280^t.670 \end{aligned}$$

§. 7.

Fortsetzung. Umformung der Formeln für die Coordinaten behuf numerischer Berechnung.

Zur numerischen Berechnung der Coordinaten aus Länge und Breite bringt man die Formeln 6) (S. 10) vortheilhaft in eine logarithmische Form, wozu die allgemeine Formel

$$\log(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \dots$$

dient. Lässt man zugleich λ Secunden bedeuten, so dass $\frac{\lambda}{\varrho}$ statt λ zu setzen ist (wo $\varrho = \text{arc. rad. in Secunden}$ bedeutet) und bezeichnet mit M den Modulus des Briggschen Systems, so ergibt die Rechnung:

$$\begin{aligned} \log(s-x) = & \log \left[\frac{a \sin \varphi \cos \varphi}{2 \varrho^2} \sqrt{\frac{1+\delta}{1+\delta \cos \varphi^2}} \lambda^2 \right] \\ & + \frac{M}{12 \varrho^2} \left[-1 + 6 \cos \varphi^2 + 9 \delta \cos \varphi^4 + 4 \delta^2 \cos \varphi^6 \right] \lambda^2 \\ & - \frac{M}{1440 \varrho^4} \left[1 + 180 \cos \varphi^2 - (300 - 1230 \delta) \cos \varphi^4 - (1860 \delta - 2680 \delta^2) \cos \varphi^6 \right. \\ & \left. - (3855 \delta^2 - 2400 \delta^3) \cos \varphi^8 - (3336 \delta^3 - 768 \delta^4) \cos \varphi^{10} \right. \\ & \left. - 1040 \delta^4 \cos \varphi^{12} \right] \lambda^4 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log y = & \log \left[\frac{a \cos \varphi}{\varrho} \sqrt{\frac{1+\delta}{1+\delta \cos \varphi^2}} \lambda \right] - \frac{M}{6 \varrho^2} \left[1 - 2 \cos \varphi^2 - \delta \cos \varphi^4 \right] \lambda^2 \\ & - \frac{M}{180 \varrho^4} \left[1 + 20 \cos \varphi^2 - (26 - 82 \delta) \cos \varphi^4 - (98 \delta - 96 \delta^2) \cos \varphi^6 \right. \\ & \left. - (113 \delta^2 - 36 \delta^3) \cos \varphi^8 - 42 \delta^3 \cos \varphi^{10} \right] \lambda^4 - \dots \end{aligned}$$

Zum bequemen numerischen Rechnen nach diesen Formeln sind Hülftafeln unentbehrlich. Am vortheilhaftesten würde es sein, wenn diese Tafeln für das Argument φ die Logarithmen der Coefficienten von λ , λ^2 und λ^4 enthalten könnten. Nimmt man für das Argument φ ein Intervall von 10 Minuten, so ändern sich jedoch die Coefficienten zum Theil zu rasch, um diese Einrichtung zu gestatten. Zweckmässiger bringt man daher die obigen Formeln in folgende Gestalt.

Man schreibe zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} F &= 2a \sqrt{\frac{1+\delta}{1+\delta \cos \varphi^2}} \\ A &= \frac{10^7 \cdot M}{3} \left[6 + 9 \delta \cos \varphi^2 + 4 \delta^2 \cos \varphi^4 \right] \\ A' &= \frac{1}{4 \times 10^8 \times M} \left[1 + 180 \cos \varphi^2 - (300 - 1230 \delta) \cos \varphi^4 - (1860 \delta - 2680 \delta^2) \cos \varphi^6 \right. \\ & \quad \left. - (3855 \delta^2 - 2400 \delta^3) \cos \varphi^8 - (3336 \delta^3 - 768 \delta^4) \cos \varphi^{10} - 1040 \delta^4 \cos \varphi^{12} \right] \end{aligned}$$

$$B = \frac{2 \times 10^7 \times M}{3} \left[2 + \delta \cos \varphi^2 \right]$$

$$B' = \frac{1}{5 \times 10^7 \times M} \left[1 + 20 \cos \varphi^2 - (26 - 82 \delta) \cos \varphi^4 - (98 \delta - 96 \delta^2) \cos \varphi^6 \right. \\ \left. - (113 \delta^2 - 36 \delta^3) \cos \varphi^8 - 42 \delta^3 \cos \varphi^{10} \right]$$

$$h = \frac{1}{2 \varrho} \dots \dots \log h = 4.384\,5448\,71 - 10$$

$$k = \frac{10^7 \cdot M}{6 \varrho^2} \dots \dots \log k = 5.230\,783 - 10.$$

Dann sind, wie man sich leicht überzeugt, die obigen Formeln in folgenden Gleichungen enthalten:

$$9) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \mu = h \lambda \cos \varphi \\ \nu = k \lambda^2 \\ \log(s-x) = \log(F \mu^2 \operatorname{tg} \varphi) + A \mu^2 - \frac{1}{2} \nu - A' \nu^2 \\ \log y = \log(F \mu) + B \mu^2 - \nu - B' \nu^2 \end{array} \right.$$

wobei jedoch noch Folgendes zu bemerken ist: Die Glieder $A \mu^2$, $\frac{1}{2} \nu$, $A' \nu^2$ und $B \mu^2$, ν , $B' \nu^2$ können als Correctionen des voranstehenden Logarithmus betrachtet werden. Diese Correctionen sind in allen Fällen, für welche die Formeln angewandt werden sollen, nur kleine Decimalbrüche. Es ist daher bequem, jene Correctionen in Einheiten der 7. Decimalstelle zu erhalten. Dies geschieht, indem man ihnen zehn-millionmal grössere Werthe giebt, als sie zufolge der zu Anfang dieses Paragraphen gegebenen Formeln haben würden. In diesem Sinne sind die Werthe von A , A' , B , B' und ν oben angesetzt.

Die Formeln geben die Werthe von x und y um so schärfer, je kleiner der Abstand des betreffenden Punktes vom Hauptmeridian ist. Um die dritte Decimalstelle der Coordinaten (in Metern) bis auf eine Einheit genau zu erhalten, darf dieser Abstand nicht grösser sein, als $3\frac{3}{4}$ Längengrade oder ungefähr 250000 Meter. Für grössere Entfernungen würde $\log y$ um ein Glied weiter zu entwickeln sein*), wenn die angegebene Schärfe festgehalten werden soll. In der Richtung des Meridians ist die Anwendung der Formeln so gut wie unbegrenzt.

Die am Schlusse beigefügte Tafel I. ist den angegebenen Grenzen entsprechend eingerichtet, kann indessen in Bezug auf φ (in der Richtung des Meridians) beliebig erweitert werden. Sie enthält die Logarithmen der 5 Grössen F , A , A' , B , B' für $\varphi = 50^\circ$ bis $\varphi = 55^\circ$ in Intervallen von 10 Minuten. Für die

*) Das erste vernachlässigte Glied von $\log y$ ist:

$$B'' = \frac{4}{105 \cdot 10^{14} \cdot M^2} \left[2 - 84 \cos \varphi^2 + (546 - 1554 \delta) \cos \varphi^4 - (502 - 6162 \delta + 6336 \delta^2) \cos \varphi^6 - (4857 \delta - 21372 \delta^2) \cos \varphi^8 \right. \\ \left. - 15654 \delta^2 \cos \varphi^{10} \right] - B'' \nu^3$$

worin die mit der 3. und höhern Potenzen von δ multiplicirten Theile weggelassen sind. Ferner ist:

$$\log \frac{4}{105 \cdot 10^{14} \cdot M^2} = 5.3053 - 20.$$

auf einander folgenden Werthe von $\log F$ sind die Differenzen angegeben. Die zweiten Differenzen, die bis 9 steigen, können unberücksichtigt bleiben, da der grösste Fehler, der daraus entstehen kann, nur 1 Einheit der 9. Decimalstelle von $\log F$ beträgt.

In dem nachfolgenden Beispiele ist für den vom Hauptmeridian entlegensten Punkt des Hannoverschen Dreiecksystems die numerische Rechnung nach den Formeln 9) und nach den im vorigen Paragraph gegebenen Vorschriften durchgeführt. Für die Länge und Breite dieses Punktes sind hier die im Beispiele am Schlusse des §. 11 aus den Coordinaten berechneten Werthe angenommen. Eine Controle für die Richtigkeit und Schärfe der Rechnung in beiden Beispielen liefert daher die Vergleichung der nachstehend berechneten Coordinaten mit jenen im Beispiel des §. 11 zu Grunde gelegten.

Insel Borkum, Westland. Feuerthurm.

$\varphi = 53^{\circ} 35' 22''.9881$	$\lambda = +3^{\circ} 16' 23''.6135$	$B \dots 6.763231$
$= 53^{\circ} 35' 383135$	$= +11783''.6135$	$\mu^2 \dots 6.458581$
$\psi - \varphi = 28'.361332$		$B\mu^2 \dots 3.221812$
$\psi = 54^{\circ} 3'.744467$	$h \dots 4.384544871$	$B\mu^2 = 1666.53$
$\psi_0 - \psi = -2^{\circ} 3'.744467$	$\lambda \dots 4.071278491$	
$= -2^{\circ}.06240778$	$\cos \varphi \dots 9.773467045$	$k \dots 5.230783$
$s = -229156^m.420$	$\mu \dots 8.229290407$	$\lambda^2 \dots 8.142557$
$s - x = +4982.924$	$F \dots 7.106557052$	$\nu \dots 3.373340$
$x = -234139^m.344$	$B\mu^2 = 1666.53$	$\nu = 2362.33$
	$- \nu = *7637.67$	
	$- B'\nu^2 = *8.75$	$B' \dots 3.3497$
	$y \dots 5.335777754$	$\nu^2 \dots 6.7467$
	$y = +216659^m.509$	$B'\nu^2 \dots 0.0964$
		$B'\nu^2 = 1.25$
	$F \dots 7.1065571$	$A \dots 6.94028$
	$\mu^2 \dots 6.4585808$	$\mu^2 \dots 6.45858$
	$\operatorname{tg} \varphi \dots 0.1322141$	$A\mu^2 \dots 3.39886$
	$A\mu^2 = 2505$	$A\mu^2 = 2505$
	$- \frac{1}{2}\nu = *8819$	
	$- A'\nu^2 = *9$	$\frac{1}{2}\nu = 1181$
	$s - x \dots 3.6974843$	
	$s - x = 4982^m.924$	$A' \dots 3.202$
		$\nu^2 \dots 6.747$
		$A'\nu^2 \dots 9.949$
		$A'\nu^2 = 1$

Die im Beispiel des §. 11 zu Grunde gelegten Coordinaten sind:

$$x = -234139.343 \text{ und } y = +216659.508,$$

womit die obigen bis auf eine Einheit der letzten Decimalstelle übereinstimmen.

Ist eine Rechnung, wie die vorstehende, für mehrere Punkte zu führen, so wird die Arbeit durch vorbereitete Rechnungsschemata auf liniirtem Papiere sehr erleichtert. Die Anordnung eines solchen Schema zeigt das folgende Beispiel.

Nach dem Berliner astronomischen Jahrbuche für 1852 ist:

	Geogr. Breite	Oestl. Länge von Ferro
Berlin . .	52° 30' 16".7	13° 3' 30".0
Leipzig .	51 20 20 .1	30 1' 45 .0
Breslau .	51 6 56 .0	34 42' 7 .5

Es sollen hieraus die Coordinaten dieser 3 Punkte für den Anfangspunkt von
 51° 31' 47".85 geogr. Breite
 und 32 22 0 östl. Länge von Ferro

berechnet werden. Der Hauptmeridian liegt demnach zwischen denjenigen beiden Punkten (Leipzig und Breslau), welche den grössten Längenunterschied haben, nahezu mitten inne, so dass der grösste Abstand von demselben ein Minimum wird und daher die Rechnung möglichst scharfe Resultate giebt. Um die Tafel I. benutzen zu können, ist die für diese zu Grunde gelegte Normalbreite: 51° 31' 47".85 beibehalten.

	1. Berlin	2. Leipzig	3. Breslau	Formeln			
$\varphi =$	52° 30' 16".7000	51° 20' 20".1000	51° 6' 56".0000	$\log(s-x) = \log[F\mu^2 \operatorname{tg} \varphi] + A\mu^2 - \frac{1}{2}v$			
$=$	52 30.278333.3	51 20.335000.0	51 6.933333.3	$- A'v^2$			
$\psi - \varphi =$	28.272341.8	28.189937.7	28.175718.6	$\log y = \log[F\mu] + B\mu^2 - v - B'v^2$			
$\psi =$	52 58.550675	51 48.524938	51 35.109052	$s = \frac{10^5}{6 \times 9} (52^\circ - \psi)$			
$\psi_0 - \psi =$	— 58.550675	+ 11.475062	+ 24.890948	$\mu = h \lambda \cos \varphi; \log h = 4.384 5448 71 - 10$			
$=$	— 0° 97584458	+ 0° 19125103	+ 0° 41484913	$v = k \lambda^2; \log k = 5.230 783 - 10$			
$s =$	— 108427.176	+ 21250.114	+ 46094.348				
$s - x =$	44.685	2594.373	2594.188				
$x =$	— 108471.861	+ 18655.741	+ 43500.160				
$\lambda =$	+ 0° 18' 30".0	+ 2° 20' 15".0	— 2° 20' 7".5				
$=$	+ 1110".0	+ 8415".0	— 8407".5				
$h \dots$	4.384 5448 71	4.384 5448 71	4.384 5448 71				
$\lambda \dots$	3.045 3229 79	3.925 0541 20	3.924 6668 76				
$\cos \varphi \dots$	9.784 4013 00	9.795 6801 44	9.797 7879 29				
$\mu \dots$	7.214 2691 50	8.105 2791 35	8.106 9996 76				
$F \dots$	7.106 5308 87	7.106 5024 85	7.106 4970 12				
$B\mu^2 =$	15 55	941 55	949 05				
$-v =$	*79 04	*8795 27	*8797 41				
$-B'v^2 =$		*67	*67				
$y \dots$	4.320 7994 96	5.211 7552 69	5.213 4713 01				
$y =$	+ 20931.459	+ 162837.816	— 163482.512				
$F \dots$	7.106 5309	7.106 5025	7.106 4970				
$\mu^2 \dots$	4.428 5383	6.210 5583	6.213 9994				
$\operatorname{tg} \varphi \dots$	0.115 0923	0.096 8902	0.093 4225				
$A\mu^2 =$	23	1416	1427				
$-\frac{1}{2}v =$	*0	*398	*399				
$-A'v^2 =$							
$s - x \dots$	1.650 1628	3.414 0324	3.414 0015				
					Ad 1.	Ad 2.	Ad 3.
				$B \dots$	6.763257	6.763285	6.763291
				$\mu^2 \dots$	4.428538	6.210558	6.213999
					1.191795	2.973843	2.977290
				$k \dots$	5.230783	5.230783	5.230783
				$\lambda^2 \dots$	6.090646	7.850108	7.849334
				$v \dots$	1.321429	3.080891	3.080117
				$B' \dots$	3.3519	3.3525	3.3525
				$v^2 \dots$	2.6429	6.1618	6.1602
					5.9948	9.5143	9.5127
				$A \dots$	6.94042	6.94050	6.94052
				$\mu^2 \dots$	4.42854	6.21056	6.21400
					1.36896	3.15106	3.15452
				$A' \dots$	3.192	3.176	3.173
				$v^2 \dots$	2.643	6.162	6.160
					5.835	9.338	9.333

Man vergleiche das zweite Beispiel im §. 11, wo die umgekehrte Rechnung geführt ist.

Anmerkung. Zum Graduiren von Karten, die nach der vorliegenden Projection gezeichnet sind, wird man für viele runde Werthe von φ und λ die zugehörigen Werthe von x und y nöthig haben. Man wird sich in diesem Falle lieber der Formeln 6) bedienen, deren Herrichtung zu diesem Zwecke durch folgendes Beispiel erläutert werden mag.

Es sei eine Karte vom Königreich Hannover von 10 zu 10 Minuten zu graduiren. Man berechne dann nach den Formeln 6) eine Tafel, deren Einrichtung das folgende Bruchstück zeigt:

φ	x	y
53° 0'	— 163539.8 — 12.9941 n^2 — 0.04 108 n^4	+ 11186.701 n — 0.004335 n^3
10	— 182083.8 — 12.9723 n^2 — 0.04 106 n^4	+ 11143.573 n — 0.004406 n^3
20	— 200628.2 — 12.9501 n^2 — 0.04 105 n^4	+ 11100.351 n — 0.004477 n^3
30	— 219173.2 — 12.9275 n^2 — 0.04 103 n^4	+ 11057.033 n — 0.004546 n^3

Hierin bedeutet n die vom Hauptmeridian gezählte Länge (positiv nach Westen) und die Einheit von n ist 10 Minuten. Es ist daher in den Formeln 6) behuf Berechnung einer solchen Tafel zu setzen:

$$\frac{\pi}{1080} n \text{ statt } \lambda.$$

Ist der Maassstab der Karte nicht grösser als $\frac{1}{10000}$, so ist es völlig ausreichend, x und y bis auf $\frac{1}{10}$ Meter genau zu erhalten. Eine nach obigem Muster berechnete Tafel giebt diese Schärfe für den ganzen Umfang des Königreichs, d. i. bis zu $n=20$ oder $\lambda=3^\circ 20'$. Für grössere Werthe von n muss in den Formeln für y noch das Glied, welches n^5 enthält, berücksichtigt werden.

Soll die Länge auf der Karte nicht vom Hauptmeridian, sondern von irgend einem andern Meridian gezählt werden, so ist der Gebrauch der Tafel weniger bequem, weil in diesem Falle die Werthe von n keine ganzen Zahlen sein werden. Aus diesem Grunde ist es dann auch zweckmässiger, wenn die Tafel statt der Coefficienten von n , n^2 , etc. deren Logarithmen enthält.

§. 8.

Berechnung der Länge und Breite aus den Coordinaten.

Nach §. 5 ist die Bedingung der Conformität für Uebertragungen der ellipsoidischen Fläche auf die Ebene enthalten in den Gleichungen

$$x + iy = f(q - i\lambda); \quad dq = \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} d\varphi.$$

Da f eine willkürlich zu wählende Function bedeutet, so kann man statt der ersten Gleichung die folgende an die Stelle setzen:

$$q - i\lambda = f(x + iy).$$

Diese Gleichung wird q und λ als Functionen von x und y liefern, sobald die Function f nach Maassgabe der in §. 5 unter 2. und 3. gegebenen Bedingungen der Projection bestimmt ist.

Zufolge der 2. Bedingung wird $\lambda=0$ für $y=0$. Bezeichnet man daher mit q_0 den Werth von q für $y=0$, entwickelt $f(x + iy)$ nach dem Taylor'schen Satze und setzt q dem reellen und $-i\lambda$ dem imaginären Theile der Reihe gleich, so erhält man:

$$10) \dots \dots \dots \begin{cases} q = q_0 - \frac{1}{2} \frac{d^2 q_0}{dx^2} y^2 + \frac{1}{24} \frac{d^4 q_0}{dx^4} y^4 - \frac{1}{720} \frac{d^6 q_0}{dx^6} y^6 + \dots \\ \lambda = -\frac{d q_0}{dx} y + \frac{1}{6} \frac{d^3 q_0}{dx^3} y^3 - \frac{1}{120} \frac{d^5 q_0}{dx^5} y^5 + \dots \end{cases}$$

worin q_0 und die Differentialquotienten von q_0 Functionen von x sind. Anstatt sie jedoch unmittelbar als solche zu entwickeln, ist es vorzuziehen, die Breite χ des dem Fusspunkte der Ordinate entsprechenden Punktes als Hilfsfunction einzuführen. Zuzufolge der 2. Bedingung liegt dieser Punkt auf dem Hauptmeridian in dem Abstand x vom Anfangspunkte. Folglich ist:

$$dx = -\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \chi)^{\frac{3}{2}}} d\chi = -\frac{a\sqrt{1+\delta}}{(1+\delta \cos^2 \chi)^{\frac{3}{2}}} d\chi$$

und der Werth von dq ist in diesem Punkte:

$$dq_0 = \frac{(1-e^2)d\chi}{(1-e^2 \sin^2 \chi) \cos \chi} = \frac{d\chi}{(1+\delta \cos^2 \chi) \cos \chi}.$$

Folglich:

$$\frac{dq_0}{dx} = -\frac{(1+\delta \cos^2 \chi)^{\frac{1}{2}}}{a \cos \chi \sqrt{1+\delta}}.$$

Hieraus ergeben sich durch wiederholtes Differentiiren und jedesmalige Division durch dx die übrigen Differentialquotienten von q_0 in Bezug auf x . Die Rechnung ergiebt:

$$\frac{dq_0}{dx} = -\frac{(1+\delta \cos^2 \chi)^{\frac{1}{2}}}{a \cos \chi (1+\delta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{d^2 q_0}{dx^2} = +\frac{(1+\delta \cos^2 \chi) \sin \chi}{a^2 \cos^3 \chi (1+\delta)}$$

$$\frac{d^3 q_0}{dx^3} = -\frac{(1+\delta \cos^2 \chi)^{\frac{3}{2}}}{a^3 \cos^5 \chi (1+\delta)^{\frac{3}{2}}} [2 - \cos \chi^2 + \delta \cos \chi^4]$$

$$\frac{d^4 q_0}{dx^4} = +\frac{(1+\delta \cos^2 \chi)^2 \sin \chi}{a^4 \cos^7 \chi (1+\delta)^2} [6 - \cos \chi^2 + \delta \cos \chi^4 - 4\delta^2 \cos \chi^6]$$

$$\frac{d^5 q_0}{dx^5} = -\frac{(1+\delta \cos^2 \chi)^{\frac{5}{2}}}{a^5 \cos^9 \chi (1+\delta)^{\frac{5}{2}}} [24 - 20 \cos \chi^2 + (1+8\delta) \cos \chi^4 - (2\delta - 4\delta^2) \cos \chi^6 \\ - (7\delta^2 - 24\delta^3) \cos \chi^8 - 28\delta^3 \cos \chi^{10}]$$

$$\frac{d^6 q_0}{dx^6} = +\frac{(1+\delta \cos^2 \chi)^3 \sin \chi}{a^6 \cos^{11} \chi (1+\delta)^3} [120 - 60 \cos \chi^2 + (1+48\delta) \cos \chi^4 - (2\delta + 36\delta^2) \cos \chi^6 \\ + (33\delta^2 - 96\delta^3) \cos \chi^8 + (196\delta^3 - 192\delta^4) \cos \chi^{10} + 280\delta^4 \cos \chi^{12}].$$

Diese Werthe sind in den Reihen 10) zu substituieren. Dann giebt die untere, nachdem zuvor χ aus x berechnet ist (wovon im nächsten Paragraph), die Formel zur Berechnung der Länge.

Aus der obern Reihe kann die Formel für die Breite auf folgende Weise hergeleitet werden.

Der Kürze wegen werde gesetzt:

$$q = q_0 - Ay^2 + A_1 y^4 - A_2 y^6 + \dots = q_0 + z.$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(1 + \delta \cos \chi^2) \sin \chi}{2 a^2 \cos \chi^2 (1 + \delta)} \\ A_1 &= \frac{(1 + \delta \cos \chi^2)^2 \sin \chi}{24 a^4 \cos \chi^4 (1 + \delta)^2} [4] \\ A_2 &= \frac{(1 + \delta \cos \chi^2)^3 \sin \chi}{720 a^6 \cos \chi^6 (1 + \delta)^3} [6] \end{aligned}$$

wo die Zeichen [4] und [6] statt der in den grossen Klammern enthaltenen Factoren resp. von $\frac{d^4 q_0}{dx^4}$ und $\frac{d^6 q_0}{dx^6}$ geschrieben sind.

Setzt man nun

$$\varphi = f(q) = f(q_0 + z),$$

so ist, weil χ dieselbe Function von q_0 ist, wie φ von q :

$$\chi = f(q_0).$$

Die Entwicklung von $\varphi = f(q_0 + z)$ nach dem Taylor'schen Satze giebt daher:

$$\varphi = \chi + \frac{d\chi}{dq_0} z + \frac{1}{2} \frac{d^2 \chi}{dq_0^2} z^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3 \chi}{dq_0^3} z^3 + \dots$$

Zufolge der oben eingeführten Bezeichnung ist:

$$z = -Ay^2 + A_1 y^4 - A_2 y^6 + \dots$$

Entwickelt man hieraus die Potenzen von z und ordnet nach y , so kommt:

$$\begin{aligned} \varphi = \chi - A \frac{d\chi}{dq_0} y^2 + \left[A_1 \frac{d\chi}{dq_0} + \frac{1}{2} A^2 \frac{d^2 \chi}{dq_0^2} \right] y^4 \\ - \left[A_2 \frac{d\chi}{dq_0} + A A_1 \frac{d^2 \chi}{dq_0^2} + \frac{1}{6} A^3 \frac{d^3 \chi}{dq_0^3} \right] y^6 + \dots \end{aligned}$$

Die Differentialquotienten von χ in Bezug auf q_0 ergeben sich aus dem Werthe von q_0 wie folgt:

$$\frac{d\chi}{dq_0} = +(1 + \delta \cos \chi^2) \cos \chi$$

$$\frac{d^2 \chi}{dq_0^2} = -(1 + \delta \cos \chi^2) \sin \chi \cos \chi [1 + 3 \delta \cos \chi^2]$$

$$\frac{d^3 \chi}{dq_0^3} = +(1 + \delta \cos \chi^2) \cos \chi [1 - (2 - 12 \delta) \cos \chi^2 - (16 \delta - 15 \delta^2) \cos \chi^4 - 18 \delta^2 \cos \chi^6].$$

Werden diese Werthe und die Werthe von A , A_1 , A_2 in obiger Reihe substituirt, so ergibt sich folgende Formel für die Breite:

$$11) \dots \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \chi - \frac{(1 + \delta \cos \chi^2)^2 \sin \chi}{2 a^2 (1 + \delta) \cos \chi} y^2 \\ &+ \frac{(1 + \delta \cos \chi^2)^3 \sin \chi}{24 a^4 (1 + \delta)^2 \cos \chi^3} \left[3 + (2 - 9 \delta) \cos \chi^2 + 10 \delta \cos \chi^4 - 4 \delta^2 \cos \chi^6 \right] y^4 \\ &- \frac{(1 + \delta \cos \chi^2)^4 \sin \chi}{720 a^6 (1 + \delta)^3 \cos \chi^5} \left[45 - 90 \delta \cos \chi^2 + (16 - 72 \delta + 225 \delta^2) \cos \chi^4 \right. \\ &+ (208 \delta - 516 \delta^2) \cos \chi^6 + (288 \delta^2 + 84 \delta^3) \cos \chi^8 + (16 \delta^3 - 192 \delta^4) \cos \chi^{10} \\ &\left. + 280 \delta^4 \cos \chi^{12} \right] y^6 + \dots \\ \text{Für die Länge erhält man aus der untern Reihe 10) folgende Formel:} \\ \lambda &= \frac{(1 + \delta \cos \chi^2)^{\frac{1}{2}}}{a (1 + \delta)^{\frac{1}{2}} \cos \chi} y - \frac{(1 + \delta \cos \chi^2)^{\frac{3}{2}}}{6 a^3 (1 + \delta)^{\frac{3}{2}} \cos \chi^3} \left[2 - \cos \chi^2 + \delta \cos \chi^4 \right] y^3 \\ &+ \frac{(1 + \delta \cos \chi^2)^{\frac{5}{2}}}{120 a^5 (1 + \delta)^{\frac{5}{2}} \cos \chi^5} \left[24 - 20 \cos \chi^2 + (1 + 8 \delta) \cos \chi^4 - (2 \delta - 4 \delta^2) \cos \chi^6 \right. \\ &\left. - (7 \delta^2 - 24 \delta^3) \cos \chi^8 - 28 \delta^3 \cos \chi^{10} \right] y^5 - \dots \end{aligned} \right.$$

Diese Formeln geben φ und λ in Theilen des dem Halbmesser gleichen Bogens.

§. 9.

Fortsetzung. Berechnung der Breite des Endpunkts eines elliptischen Meridianbogens aus dessen von einer festen Breite aus gezählten Länge.

Die Berechnung von χ aus x kann durch Umkehrung des in §. 6. gegebenen Verfahrens geschehn. Indem χ statt φ und x statt s geschrieben wird, alle übrigen Bezeichnungen aber in derselben Bedeutung beibehalten werden, gestaltet sich diese Umkehrung wie folgt.

Durch Umkehrung der Reihe 7) erhält man folgende Reihe:*)

$$\chi - \psi' = \beta \sin 2 \psi' + \beta_1 \sin 4 \psi' + \beta_2 \sin 6 \psi' + \dots$$

*) Man kann diese Umkehrung mit Hülfe von Lagrange's Umkehrungsformel auf folgende Weise ausführen. Man setze:

$$F(\varphi) = \alpha \sin 2 \varphi - \alpha_1 \sin 4 \varphi + \alpha_2 \sin 6 \varphi - \dots$$

so dass also:

$$\varphi = \psi' + F(\varphi).$$

Dann ist nach der genannten Formel von Lagrange:

$$\varphi = \psi' + F(\psi') + \frac{d \cdot F(\psi')^2}{2 d \psi'} + \frac{d^2 \cdot F(\psi')^3}{2 \cdot 3 d \psi'^2} + \dots$$

Es sind zunächst die Potenzen von $F(\psi')$ zu entwickeln. Die dadurch entstehenden Producte der Sinus sind nach bekannten Formeln in Summen und Differenzen der Sinus und Cosinus zu verwandeln. Darnach lassen sich die Differentiationen sehr leicht ausführen. Schreibt man schliesslich noch χ statt φ , so erhält man die obige Reihe.

worin:

$$\begin{aligned}\beta &= \varrho \left[6\varepsilon^2 + 48\varepsilon^4 + 426\varepsilon^6 + 4080\varepsilon^8 + 41722\varepsilon^{10} + 452368\varepsilon^{12} + \dots \right] \\ \beta_1 &= \dots \varrho \left[21\varepsilon^4 + 336\varepsilon^6 + 4264\varepsilon^8 + 50432\varepsilon^{10} + 584039\varepsilon^{12} + \dots \right] \\ \beta_2 &= \dots \varrho \left[\frac{302}{3}\varepsilon^6 + 2416\varepsilon^8 + 40152\varepsilon^{10} + \frac{1725760}{3}\varepsilon^{12} + \dots \right] \\ \beta_3 &= \dots \varrho \left[\frac{1097}{2}\varepsilon^8 + 17552\varepsilon^{10} + \frac{3612752}{10}\varepsilon^{12} + \dots \right] \\ \beta_4 &= \dots \varrho \left[\frac{32044}{10}\varepsilon^{10} + 128176\varepsilon^{12} + \dots \right] \\ \beta_5 &= \dots \varrho \left[\frac{293393}{15}\varepsilon^{12} + \dots \right] \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

(Vergl. den ersten Absatz der Note auf Seite 13.)

Setzt man hierin

$$\psi = \psi' + \nu,$$

so erhält man die Umkehrung der Reihe 8):

$$12) \dots \chi - \psi = -\nu + \beta \sin 2(\psi - \nu) + \beta_1 \sin 4(\psi - \nu) + \beta_2 \sin 6(\psi - \nu) + \dots$$

Wie in §. 6 ist hier zu setzen:

$$\nu = (\psi_0 - \varphi_0) + \alpha \sin 2\varphi_0 - \alpha_1 \sin 4\varphi_0 + \alpha_2 \sin 6\varphi_0 - \dots *)$$

und für ψ_0 eine volle Gradzahl so anzunehmen, dass die Differenz $\chi - \psi$ positiv wird. Wie man leicht sieht, ist zu diesem Zwecke $\psi_0 < \varphi_0$ zu nehmen.

Nach der Reihe 12) ist eine Tafel zu berechnen, aus welcher man für das Argument ψ die Differenz $\chi - \psi$ entnehmen kann. Die Anwendung dieser Tafel ist dann folgende:

Aus dem gegebenen x ist ψ zu berechnen, was nach §. 6. mit Hülfe der Gleichung $x = \sigma(\psi_0 - \psi)$ geschieht; es ist hieraus:

$$\psi = \psi_0 - \frac{x}{\sigma}.$$

Zu diesem ψ entnimmt man aus der Tafel die zugehörige Differenz $\chi - \psi$, die zu ψ addirt χ giebt.

Mit Anwendung der numerischen Werthe des §. 3 ergibt sich in Minuten:

$$\begin{aligned}\log \beta &= 0.930\,9250\,6425 \dots \beta = 8.52952\,9278 \\ \log \beta_1 &= 8.091\,4928\,2 \dots \beta_1 = 0.01234\,5049 \\ \log \beta_2 &= 5.388\,66 \dots \beta_2 = 0.00002\,4471 \\ \log \beta_3 &= 2.7414 \dots \beta_3 = 0.00000\,0055 \\ \log \beta_4 &= 0.1245 \dots \text{etc.} \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

*) Durch Substitution dieses Werthes von ν in der Reihe 12) geht diese in die folgende über:

$$\begin{aligned}\chi - \psi &= (\varphi_0 - \psi_0) + 2\beta \sin(\psi - \psi_0) \cos(\psi + \psi_0 - 2\nu) \\ &\quad + 2\beta_1 \sin 2(\psi - \psi_0) \cos 2(\psi + \psi_0 - 2\nu) \\ &\quad + 2\beta_2 \sin 3(\psi - \psi_0) \cos 3(\psi + \psi_0 - 2\nu) \\ &\quad \text{etc.}\end{aligned}$$

Für ψ_0 ist hier zu setzen:

$$\psi_0 = 51^\circ.$$

Darnach bestimmt sich der Werth von ν :

$$\nu = -23'.484715\ 502 = -23' 29''.08293 \dots$$

Ferner ist:

$$\psi_0 - \psi = \frac{54}{10^5} x \text{ Minuten} = \frac{9}{10^6} x \text{ Grad},$$

wo x in Metern gegeben sein muss.

Die Tafel II. enthält in der zweiten Columne die Werthe von $\chi - \psi$ für das links daneben stehende Argument ψ . Die in §. 6 gemachten Bemerkungen in Bezug auf den Gebrauch der Tafel I. haben auch für Tafel II. Geltung. Die zweiten Differenzen sind jedoch hier negativ, also die entsprechende Correction des Werthes von $(\chi - \psi)$ beim Interpoliren positiv. Für beide Tafeln gilt jedoch, wie man leicht sieht, die folgende gemeinschaftliche Regel:

Der Absolutwerth der Correction wegen der zweiten Differenz ist beim Vorwärts-Interpoliren von dem Absolutwerthe des Proportionaltheils von $(\psi - \varphi)$ oder $(\chi - \psi)$ zu subtrahiren, beim Rückwärts-Interpoliren zu diesem zu addiren.

Beispiel:

$$\begin{aligned} x &= +156465^m.747 \\ \psi_0 - \psi &= +1^\circ.40819172 \\ \psi &= 49^\circ.59180828 \\ &= 49^\circ 35'.508497 \\ \chi - \psi &= 31'.881298 \\ \chi &= 50^\circ 7'.389795 \\ &= 50^\circ 7' 23''.3877 \quad (\text{vergl. Beispiel in §. 6.}) \end{aligned}$$

Anmerkung. Die Anmerkung am Schlusse des §. 6 findet auch hier Anwendung. Die dort gegebenen Formeln erhält man hier in ihren Umkehrungen auf folgende Weise. Aus der Gleichung:

$$\sigma_1 (\psi_0 - \psi_1) = \sigma (\psi_0 - \psi)$$

folgt:

$$\psi_1 = \psi + \frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma} (\psi_0 - \psi_1)$$

und

$$\chi - \psi_1 = -\frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma} (\psi_0 - \psi_1) + (\chi - \psi).$$

Setzt man hierin für $(\chi - \psi)$ den unter 12) gegebenen Werth, so kommt:

$$\chi - \psi_1 = -\frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma} (\psi_0 - \psi_1) - \nu + \beta \sin 2(\psi - \nu) + \beta_1 \sin 4(\psi - \nu) + \beta_2 \sin 6(\psi - \nu) + \dots$$

Darin ist:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1 - \frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma} (\psi_0 - \psi_1) \\ \nu &= (\psi_0 - \varphi_0) + \alpha \sin 2\varphi_0 - \alpha_1 \sin 4\varphi_0 + \alpha_2 \sin 6\varphi_0 - \dots \end{aligned}$$

Die Einrichtung einer Hülftafel, wie sie behuf der umgekehrten Rechnung beispielsweise in der Anmerkung des §. 6 gegeben ist, kann hier auf folgende Weise geschehn:

Man setze:

$$\sigma_1 = \frac{10^5}{105} \text{ Toisen}$$

$$\psi_0 = 51^0.$$

Dann wird:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma} = 0.002334 \, 673$$

$$\nu = -23'.484715 \, 502 = -23' \, 29''.08293 \dots$$

und die obige Reihe liefert folgende Werthe für $\chi - \psi_1$:

ψ_1	$\chi - \psi_1$	Diff.
$49^0 30'$	$31'.676120$	14623
40	690743	14339
50	705082	14053
50^0	719135	13770
10	732905	13485
20	746390	13202
30	759592	

Ist x in Toisen gegeben, so ist:

$$51^0 - \psi_1 = \frac{105}{10^5} x \text{ Minuten}$$

Beispiel.

$$\begin{aligned} x &= +80280'.670 \\ \frac{1}{2}x &= 4014 \, 0335 \\ 51^0 - \psi_1 &= +84'.2947035 \\ \psi_1 &= 49^0 35'.7052965 \\ \chi - \psi_1 &= 31.684497.7 \\ \chi &= 50^0 7'.389794.2 \\ &= 50^0 7' 23''.3876.5 \end{aligned}$$

(Vergl. Beispiel in §. 6 Anmerkung.)

§. 10.

Fortsetzung. Umformung der Formeln für Breite und Länge behuf numerischer Berechnung.

Zur numerischen Berechnung der Breite und Länge aus den Coordinaten wird man den Formeln 11) eine logarithmische Form geben. Die Rechnung ergiebt, wenn M den Modul des briggschen Systems bedeutet:

$$\begin{aligned} \log(\chi - \varphi) &= \log \left[\frac{q(1 + \delta \cos \chi^2)^2}{2a^2(1 + \delta)} y^2 \operatorname{tg} \chi \right] \\ &\quad - \frac{M(1 + \delta \cos \chi^2) y^2}{12a^2(1 + \delta) \cos \chi^2} \left[3 + (2 - 9\delta) \cos \chi^2 + 10\delta \cos \chi^4 - 4\delta^2 \cos \chi^6 \right] \\ &\quad + \frac{M(1 + \delta \cos \chi^2)^2 y^4}{1440a^4(1 + \delta)^2 \cos \chi^4} \left[135 - (60 + 90\delta) \cos \chi^2 + (44 - 408\delta + 495\delta^2) \cos \chi^4 \right. \\ &\quad \left. + (632\delta - 1044\delta^2) \cos \chi^6 + (732\delta^2 - 24\delta^3) \cos \chi^8 + (464\delta^3 - 768\delta^4) \cos \chi^{10} \right. \\ &\quad \left. + 1040\delta^4 \cos \chi^{12} \right] - \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \lambda = \log & \left[\frac{\varrho y}{a \cos \chi} \sqrt{\frac{1 + \delta \cos \chi^2}{1 + \delta}} \right] - \frac{M(1 + \delta \cos \chi^2) y^2}{6 a^2 (1 + \delta) \cos \chi^2} \left[2 - \cos \chi^2 + \delta \cos \chi^4 \right] \\ & + \frac{M(1 + \delta \cos \chi^2)^2 y^4}{180 a^4 (1 + \delta)^2 \cos \chi^4} \left[26 - 20 \cos \chi^2 - (1 - 2\delta) \cos \chi^4 + (2\delta + 6\delta^2) \cos \chi^6 \right. \\ & \left. - (13\delta^2 - 36\delta^3) \cos \chi^8 - 42\delta^3 \cos \chi^{10} \right] - \dots \end{aligned}$$

Die Differenz $\chi - \varphi$ und die Länge λ bedeuten hier Secunden und es ist wie früher $\varphi = \text{arc. rad. in Secunden}$.

Um diese Formeln in eine für die Rechnung bequeme Gestalt zu bringen, setze man zur Abkürzung:

$$G = \frac{\varrho}{a} \sqrt{\frac{1 + \delta \cos \chi^2}{1 + \delta}}$$

$$H = \frac{\varrho (1 + \delta \cos \chi^2)^2}{2 a^2 (1 + \delta)}$$

$$C = \frac{10^7 \cdot M}{12 \varrho^2} \left[3 + (2 - 9\delta) \cos \chi^2 + 10\delta \cos \chi^4 - 4\delta^2 \cos \chi^6 \right]$$

$$\begin{aligned} C' = \frac{10^7 \cdot M}{1440 \varrho^4} & \left[135 - (60 + 90\delta) \cos \chi^2 + (44 - 408\delta + 495\delta^2) \cos \chi^4 \right. \\ & \left. + (632\delta - 1044\delta^2) \cos \chi^6 + (732\delta^2 - 24\delta^3) \cos \chi^8 + (464\delta^3 - 768\delta^4) \cos \chi^{10} \right. \\ & \left. + 1040\delta^4 \cos \chi^{12} \right] \end{aligned}$$

$$D = \frac{10^7 \cdot M}{6 \varrho^2} \left[2 - \cos \chi^2 + \delta \cos \chi^4 \right]$$

$$\begin{aligned} D' = \frac{10^7 \cdot M}{180 \varrho^4} & \left[26 - 20 \cos \chi^2 - (1 - 2\delta) \cos \chi^4 + (2\delta + 6\delta^2) \cos \chi^6 \right. \\ & \left. - (13\delta^2 - 36\delta^3) \cos \chi^8 - 42\delta^3 \cos \chi^{10} \right] \end{aligned}$$

Dann sind die obigen Formeln enthalten in den Gleichungen:

$$13) \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} z &= \frac{G y}{\cos \chi} \\ \log(\chi - \varphi) &= \log \left[H y^2 \operatorname{tg} \chi \right] - C z^2 + C' z^4 \\ \log \lambda &= \log z - D z^2 + D' z^4. *) \end{aligned} \right.$$

Die Tafel II. enthält die Logarithmen der sechs Grössen G , H , C , C' , D , D' für das Argument χ , welches von 50° bis 55° mit Intervallen von 10 Minuten fortschreitet und in der ersten mit ψ überschriebenen Columnne aufzusuchen ist (s. d. Note unter Tafel II).

Die Correctionen Cz^2 , $C'z^4$; Dz^2 , $D'z^4$ werden in Einheiten der 7. Decimalstelle erhalten. Für die auf einander folgenden Werthe von $\log G$ sind die Differenzen angegeben. Die zweiten Differenzen, die bis auf 9 steigen, können unberücksichtigt bleiben.

*) Vergl. Briefwechsel etc. Bd. II., S. 233 und flgde.

Die auf S. 19 gemachten Bemerkungen in Bezug auf die Schärfe der Formeln 9) und die Grenzen ihrer Anwendbarkeit finden hier eine ganz analoge Anwendung. Es ist daher nicht nöthig, diese Bemerkungen hier zu wiederholen. Es sei nur erwähnt, dass die dort angegebene Schärfe von $\frac{1}{1000}$ Meter in den Werthen von x und y einer Schärfe von $\frac{1}{10000}$ Secunde oder $\frac{1}{1000000}$ Minute in den Werthen von λ und φ ungefähr entspricht. *)

(Beispiele siehe am Schlusse des §. 11.)

§. 11.

Berechnung der Convergenz des Meridians aus den Coordinaten.

Das Bild eines Meridians ist im Allgemeinen eine Curve. Nur der Hauptmeridian wird durch eine Gerade, nämlich durch die x -Achse dargestellt.

Es sei A ein Punkt auf der Ellipsoidfläche und a seine Darstellung auf der Ebene. Dann nennt Gauss den Winkel, den die Darstellung des Meridians von A , im Sinne von Norden nach Süden, mit der durch a gehenden Parallele zur x -Achse, im Sinne wachsender x genommen, macht, die Convergenz des Meridians im Punkte A oder a . Dieser Winkel wird von dieser zu jener Linie in dem Sinne von der Linken nach der Rechten gezählt.

Man erhält in Bezug auf die rechtwinkligen Coordinaten x, y die Gleichung der Curve, die den Meridian von der Länge λ darstellt, wenn man in der untern Reihe 10) λ constant annimmt. Der daraus abgeleitete Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ wird folglich gleich sein der trigonometrischen Tangente des gesuchten Convergenz-Winkels im Punkte x, y .

Bezeichnet man diesen Winkel mit c , so ergibt die Differentiation jener Gleichung, wobei y als Function von x anzusehen ist:

$$\operatorname{tg} c = \frac{\frac{d^2 q_0}{dx^2} y - \frac{1}{6} \frac{d^4 q_0}{dx^4} y^3 + \frac{1}{120} \frac{d^6 q_0}{dx^6} y^5 - \dots}{-\frac{dq_0}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d^3 q_0}{dx^3} y^2 - \frac{1}{24} \frac{d^5 q_0}{dx^5} y^4 + \dots}$$

Die Werthe der Differentialquotienten $\frac{dq_0}{dx}, \frac{d^2 q_0}{dx^2}, \text{ etc.}$ sind in §. 8 gegeben. Substituiert man diese in dem Ausdrücke für $\operatorname{tg} c$ und führt die angezeigte Division aus, so ergibt sich:

*) Das erste vernachlässigte Glied von $\log \lambda$ ist;

$$- D'' z^6$$

$$D'' = \frac{10^7 M}{5670 \varrho^6} \left[502 - 546 \cos \chi^2 + (84 + 168 \delta) \cos \chi^4 - (2 + 114 \delta + 279 \delta^2) \cos \chi^6 \right. \\ \left. + (6 \delta + 300 \delta^2) \cos \chi^8 + 30 \delta^2 \cos \chi^{10} \right]$$

$$\log \frac{10^7 M}{5670 \varrho^6} = 0.9977 - 30$$

Die mit $\delta^3, \delta^4, \text{ etc.}$ multiplicirten Theile von D'' sind weggelassen.

$$14) \dots \operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} \chi}{a} \sqrt{\frac{1+\delta \cos \chi^2}{1+\delta}} y - \frac{\operatorname{tg} \chi}{3a^3} \left[\sqrt{\frac{1+\delta \cos \chi^2}{1+\delta}} \right]^3 \left[1 - \delta \cos \chi^2 - 2\delta^2 \cos \chi^4 \right] y^3 \\ + \frac{\operatorname{tg} \chi}{15a^5} \left[\sqrt{\frac{1+\delta \cos \chi^2}{1+\delta}} \right]^5 \left[(2+6\delta) - (4\delta - 3\delta^2) \cos \chi^2 + (6\delta^2 - 27\delta^3) \cos \chi^4 \right. \\ \left. + (47\delta^3 - 24\delta^4) \cos \chi^6 + 35\delta^4 \cos \chi^8 \right] y^5 - \dots$$

Da c immer nur ein kleiner Winkel ist, so ist es vortheilhafter, anstatt der trigonometrischen Tangente diesen Winkel selbst zu erhalten. Der vorstehende Werth von $\operatorname{tg} c$ ergibt unter Anwendung der bekannten Reihe:

$$c = \operatorname{tg} c - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 c + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 c - \dots$$

folgende Reihe für c :

$$c = \frac{y \operatorname{tg} \chi}{a} \sqrt{\frac{1+\delta \cos \chi^2}{1+\delta}} - \frac{y^3 \operatorname{tg} \chi}{3a^3 \cos \chi^2} \left[\sqrt{\frac{1+\delta \cos \chi^2}{1+\delta}} \right]^3 \left[1 - \delta \cos \chi^4 - 2\delta^2 \cos \chi^6 \right] \\ + \frac{y^5 \operatorname{tg} \chi}{15a^5 \cos \chi^4} \left[\sqrt{\frac{1+\delta \cos \chi^2}{1+\delta}} \right]^5 \left[3 - \cos \chi^2 + \delta \cos \chi^4 + (\delta - 7\delta^2) \cos \chi^6 \right. \\ \left. + (16\delta^2 - 27\delta^3) \cos \chi^8 + (47\delta^3 - 24\delta^4) \cos \chi^{10} + 35\delta^4 \cos \chi^{12} \right] - \dots$$

Diese Reihe giebt c in Theilen des dem Halbmesser gleichen Bogens.

Zur numerischen Berechnung von c ist die logarithmische Form bequemer. Indem man c Secunden bedeuten lässt, ergibt sich aus der vorigen Reihe:

$$15) \log c = \log \left[\frac{\varrho y \operatorname{tg} \chi}{a} \sqrt{\frac{1+\delta \cos \chi^2}{1+\delta}} \right] - \frac{M y^2}{3a^2 \cos \chi^2} \frac{1+\delta \cos \chi^2}{1+\delta} \left[1 - \delta \cos \chi^4 - 2\delta^2 \cos \chi^6 \right] \\ + \frac{M y^4}{90a^4 \cos \chi^4} \left[\frac{1+\delta \cos \chi^2}{1+\delta} \right]^2 \left[13 - 6 \cos \chi^2 + 16\delta \cos \chi^4 + (6\delta - 22\delta^2) \cos \chi^6 \right. \\ \left. + (91\delta^2 - 162\delta^3) \cos \chi^8 + (262\delta^3 - 144\delta^4) \cos \chi^{10} + 190\delta^4 \cos \chi^{12} \right] - \dots$$

Hier ist, wie früher, M der Modulus des briggschen Systems und $\varrho = \text{arc. rad. in Secunden}$.

Setzt man ferner zur Abkürzung:

$$G = \frac{\varrho}{a} \sqrt{\frac{1+\delta \cos \chi^2}{1+\delta}} \quad (\text{wie in §. 10.})$$

$$E = \frac{10^7 \cdot M}{3\varrho^2} \left[1 - \delta \cos \chi^4 - 2\delta^2 \cos \chi^6 \right]$$

$$E' = \frac{10^7 \cdot M}{90\varrho^4} \left[13 - 6 \cos \chi^2 + 16\delta \cos \chi^4 + (6\delta - 22\delta^2) \cos \chi^6 + (91\delta^2 - 162\delta^3) \cos \chi^8 \right. \\ \left. + (262\delta^3 - 144\delta^4) \cos \chi^{10} + 190\delta^4 \cos \chi^{12} \right]$$

so ist die obige Formel in folgenden beiden Gleichungen enthalten:

$$16) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{Gy}{\cos \chi} \text{ (wie in §. 10.)} \\ \log c = \log [Gy \operatorname{tg} \chi] - Ez^2 + E'z^4, \end{array} \right.$$

wobei jedoch zu bemerken, dass die Correctionen Ez^2 , $E'z^4$ in Einheiten der 7. Decimalstelle erhalten werden.*)

Die Logarithmen der Grössen G , E , E' sind für das Argument χ in Tafel II. enthalten, über deren Einrichtung in §. 11 bereits das Nöthige gesagt ist.

Der Convergenzwinkel c wird bei Azimuthbestimmungen gebraucht, worüber in §. 16 das Nähere.

Beispiele zu den beiden letzten Paragraphen:

Insel Borkum, Westland. Feuerthurm.

$$\begin{array}{rcl} x & = & -234139^m.343 \\ \psi_0 - \psi & = & -2^0.10725409 \\ \psi & = & 53^0 6'.435245 \\ \chi - \psi & = & 31'.634743 \\ \chi & = & 53^0 38'.069988 \\ & = & 53^0 38' 4''.1993 \\ \chi - \varphi & = & 2'41''.2112 \\ \varphi & = & 53^0 35'22''.9881 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} y & = & +216659^m.508 \\ y & . . . & 5.335777753 \\ G & . . . & 8.508897003 \\ 1:\cos \chi & . . . & 0.226993555 \\ z & . . . & 4.071668311 \\ -Dz^2 & = & *609694 \\ D'z^4 & = & 486 \\ \lambda & . . . & 4.071278491 \\ \lambda & = & +11783''.6135 \\ & = & +3^0 16'23''.6135 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} H & . . . & 1.4033513 \\ y^2 & . . . & 10.6715555 \\ \operatorname{tg} \chi & . . . & 0.1329248 \\ -Cz^2 & = & *5633 \\ C'z^4 & = & 4 \\ \chi - \varphi & . . . & 2.2073953 \\ \chi - \varphi & = & 161''.2112 \\ & = & 2'41''.2112 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} Gy & . . . & 3.844674756 \\ \operatorname{tg} \chi & . . . & 0.132924811 \\ -Ez^2 & = & *527086 \\ E'z^4 & = & 563 \\ c & . . . & 3.977127216 \\ c & = & +9486''.9632 \\ & = & +2^0 38'6''.9632 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} D & . . . & 5.448069 \\ z^2 & . . . & 8.143337 \\ Dz^2 & . . . & 3.591406 \\ Dz^2 & = & 3903.06 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} D' & . . . & 4.4000 \\ z^4 & . . . & 16.2867 \\ D'z^4 & . . . & 0.6867 \\ D'z^4 & = & 4.86 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} C & . . . & 5.49681 \\ z^2 & . . . & 8.14334 \\ Cz^2 & . . . & 3.64015 \\ Cz^2 & = & 4367 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} C' & . . . & 4.297 \\ z^4 & . . . & 16.287 \\ C'z^4 & . . . & 0.584 \\ C'z^4 & = & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} E & . . . & 5.531455 \\ z^2 & . . . & 8.143337 \\ Ez^2 & . . . & 3.674792 \\ Ez^2 & = & 4729.24 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} E' & . . . & 4.4635 \\ z^4 & . . . & 16.2867 \\ E'z^4 & . . . & 0.7502 \\ E'z^4 & = & 5.63 \end{array}$$

NB. Eine Controle dieser Rechnung für φ und λ enthält das Beispiel des §. 7, wo rückwärts aus diesen Werthen die Coordinaten x und y berechnet sind.

Ist die Rechnung für viele Punkte zu führen, so wird man sich vorbereiteter Rechnungsschemata auf liniirtem Papiere bedienen, deren Anordnung aus folgendem Beispiel ersichtlich, welches die Umkehrung der im Beispiele S. 21 geführten Rechnung enthält:

*) Vergl. Briefwechsel etc. Bd. II., S. 233 und flgde.

Berechnung der Länge, Breite und Convergenz aus den Coordinaten.

Anfangspunkt: $51^{\circ} 31' 47''.85$ geogr. Breite, $32^{\circ} 22' 0''$ östl. Länge von Ferro.

	1. Berlin.	2. Leipzig.	3. Breslau.	Formeln.			
$x =$	-108471.861	$+18655.741$	$+43500.160$	$\log(\chi - \varphi) = \log[Hy^2 \operatorname{tg} \chi] - Cz^2 + C'z^4$			
$\psi_0 - \psi =$	$-0^{\circ}.97624675$	$+0^{\circ}.16790167$	$+0^{\circ}.39150144$	$\log \lambda = \log z - Dz^2 + D'z^4$			
$=$	$-58'.574805.0$	$+10'.074100.2$	$+23'.490086.4$	$\log c = \log[Gy \operatorname{tg} \chi] - Ez^2 + E'z^4$			
$\psi =$	$51^{\circ} 58'.574805.0$	$50^{\circ} 49'.925899.8$	$50^{\circ} 36'.509913.6$	$z = \frac{Gy}{\cos \chi}$			
$\chi - \psi =$	$31.727627.4$	$31.808548.2$	$31.822818.9$	$\psi = \left(51 - \frac{9}{10^6} x\right) \text{ Grad.}$			
$\chi =$	$52^{\circ} 30'.302432.4$	$51^{\circ} 21'.734448.0$	$51^{\circ} 8'.332732.5$				
$=$	$52^{\circ} 30'18''.1459.4$	$51^{\circ} 21'44''.0668.8$	$51^{\circ} 8'19''.9639.5$				
$\chi - \varphi =$	$1.4459.5$	$123.9668.4$	$123.9640.4$				
$\varphi =$	$52^{\circ} 30'16''.7000$	$51^{\circ} 20'20''.1000$	$51^{\circ} 6'55''.9999$				
$y =$	$+20931.459$	$+162837.816$	-163482.512		Ad 1.	Ad 2.	Ad 3.
$G \dots$	8.508924232	8.508952073	8.508957545	$D \dots$	5.443078	5.437916	5.436894
$y \dots$	4.320799496	5.211755269	5.213471301	$z^2 \dots$	6.090653	7.850497	7.849720
$1:\cos \chi \dots$	0.215602669	0.204540931	0.202431380		1.533731	3.288413	3.286614
$z \dots$	3.045326397	3.925248273	3.924860226	$D' \dots$	4.3909	4.3813	4.3795
$-Dz^2 =$	$*6582$	$*805727$	$*806530$	$z^4 \dots$	2.1813	5.7010	5.6994
$+D'z^4 =$		121	120		6.5722	0.0823	0.0789
$\lambda \dots$	3.045322979	3.925054121	3.924666876				
$\lambda =$	$+1110''.00000$	$+8415''.00001$	$-8407''.50000$				
$=$	$+0^{\circ}18'30''.0$	$+2^{\circ}20'15''.0$	$-2^{\circ}20'7''.5$				
$=$	$31 \ 3 \ 30.0 \ddot{v}. F.$	$30 \ 1 \ 45.0 \ddot{v}. F.$	$34 \ 42 \ 7.5 \ddot{v}. F.$				
$H \dots$	1.4034602	1.4035716	1.4035934	$C \dots$	5.50123	5.50570	5.50657
$y^2 \dots$	8.6415990	0.4235105	0.4269426	$z^2 \dots$	6.09065	7.85050	7.84972
$\operatorname{tg} \chi \dots$	0.1150986	0.0972527	0.0937843		1.59188	3.35620	3.35629
$-Cz^2 =$	$*61$	$*7729$	$*7729$	$C' \dots$	4.295	4.293	4.293
$+C'z^4 =$		1	1	$z^4 \dots$	2.181	5.701	5.699
$\chi - \varphi \dots$	0.1601539	1.9241078	1.9240933		6.476	9.994	9.992
$\chi - \varphi =$	$+1''.4459.5$	$+83''.9668.4$	$+83''.9640.4$				
$Gy \dots$	2.829723728	3.720707342	3.722428846	$E \dots$	5.531415	5.531372	5.531364
$\operatorname{tg} \chi \dots$	0.115098638	0.097252657	0.093784311	$z^2 \dots$	6.090653	7.850497	7.849720
$-Ez^2 =$	$*5811$	$*759082$	$*759517$		1.622068	3.381869	3.381084
$+E'z^4 =$		143	142	$E' \dots$	4.4590	4.4544	4.4535
$c \dots$	2.944818177	3.817719224	3.815972816	$z^4 \dots$	2.1813	5.7010	5.6994
$c =$	$+880''.68009$	$+6572''.32792$	$-6545''.95199$		6.6403	0.1554	0.1529
$=$	$+0^{\circ}14'40''.68009$	$+1^{\circ}49'32''.32792$	$-1^{\circ}49'5''.95199$				

Anmerkung. Da zufolge der Conformitäts-Bedingung zwei von einem Punkte ausgehende Linien auf der Ellipsoidfläche denselben Winkel mit einander machen, wie ihre Darstellungen auf der Ebene, so kann man unter „Convergenz des Meridians“ auch den Winkel verstehn, den der Meridian von A mit einer durch A gehenden Curve macht, deren Darstellung eine Parallele zur x -Achse ist.

Um eine Formel abzuleiten, welche den Convergenzwinkel c für einen in Länge und Breite gegebenen Punkt giebt, kann man von den Reihen 4) (S. 9) ausgehen. Indem man hierin λ als constant ansieht, erhält man durch Differentiation nach q :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dq} &= \frac{ds}{dq} - \frac{1}{2} \frac{d^3 s}{dq^3} \lambda^2 + \frac{1}{24} \frac{d^5 s}{dq^5} \lambda^4 - \dots \\ \frac{dy}{dq} &= -\frac{d^2 s}{dq^2} \lambda + \frac{1}{6} \frac{d^4 s}{dq^4} \lambda^3 - \frac{1}{120} \frac{d^6 s}{dq^6} \lambda^5 + \dots\end{aligned}$$

woraus wegen $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} c$:

$$\operatorname{tg} c = \frac{-\frac{d^2 s}{dq^2} \lambda + \frac{1}{6} \frac{d^4 s}{dq^4} \lambda^3 - \frac{1}{120} \frac{d^6 s}{dq^6} \lambda^5 + \dots}{\frac{ds}{dq} - \frac{1}{2} \frac{d^3 s}{dq^3} \lambda^2 + \frac{1}{24} \frac{d^5 s}{dq^5} \lambda^4 - \dots}$$

Substituirt man hierin die unter 5) (S. 10) gegebenen Werthe der Differentialquotienten und entwickelt, so erhält man:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} c &= \lambda \sin \varphi + \frac{\lambda^3 \sin \varphi}{3} \left[1 + 3 \delta \cos \varphi^4 + 2 \delta^2 \cos \varphi^6 \right] \\ &+ \frac{\lambda^5 \sin \varphi}{15} \left[2 + (15 \delta - 40 \delta^2) \cos \varphi^6 + (75 \delta^2 - 60 \delta^3) \cos \varphi^8 + (93 \delta^3 - 24 \delta^4) \cos \varphi^{10} \right. \\ &\quad \left. + 35 \delta^4 \cos \varphi^{12} \right] + \dots\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich ferner, indem man c und λ Secunden bedeuten lässt:

$$\begin{aligned}\log c &= \log \left[\lambda \sin \varphi \right] + \frac{M \lambda^2 \cos \varphi^2}{3 \varrho^2} \left[1 + 3 \delta \cos \varphi^2 + 2 \delta^2 \cos \varphi^4 \right] \\ &- \frac{M \lambda^4 \cos \varphi^2}{90 \varrho^4} \left[6 - (13 - 90 \delta) \cos \varphi^2 - (150 \delta - 300 \delta^2) \cos \varphi^4 - (445 \delta^2 \right. \\ &\quad \left. - 360 \delta^3) \cos \varphi^6 - (498 \delta^3 - 144 \delta^4) \cos \varphi^8 - 190 \delta^4 \cos \varphi^{10} \right] + \dots\end{aligned}$$

Steht eine Tafel zu Gebote, welche die Logarithmen der Coefficienten von $\lambda^2 \cos \varphi^2$ und $\lambda^4 \cos \varphi^2$ enthält, so ist diese Formel zur Berechnung von c vollkommen bequem. Da man jedoch nicht leicht in die Lage kommen wird, den Winkel c aus Länge und Breite berechnen zu müssen, so sind die genannten Logarithmen in den hinten beigefügten Tabellen nicht mit aufgenommen.

§. 12.

Berechnung des Vergrößerungsverhältnisses aus Länge und Breite.

Unter Vergrößerungsverhältniss ist das Verhältniss zu verstehn, in welchem ein Linearelement auf der Ellipsoidfläche in seiner Abbildung auf der Ebene vergrößert oder verkleinert wird. Bezeichnet daher σ ein vom Punkte λ, φ ausgehendes Linearelement auf der Ellipsoidfläche, und Σ dessen Bild auf der Ebene, so wird das Vergrößerungsverhältniss im Punkte λ, φ durch den Quotienten $\frac{\Sigma}{\sigma}$ dargestellt.

Nach §. 4 ist dieser Quotient:

$$\frac{\Sigma}{\sigma} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{a \cos \varphi} \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{d\lambda^2 + dq^2}} = \frac{\sqrt{1 + \delta \cos \varphi^2}}{a \cos \varphi \sqrt{1 + \delta}} \sqrt{\frac{d(x + iy)}{d(\lambda + iq)} \frac{d(x - iy)}{d(\lambda - iq)}}$$

Bezeichnet man daher das Vergrößerungsverhältniss mit m , so ist:

$$m^2 = \frac{1 + \delta \cos \varphi^2}{a^2 (1 + \delta) \cos^2 \varphi} \frac{d(x + iy)}{d(\lambda + iq)} \frac{d(x - iy)}{d(\lambda - iq)}.$$

Da man hat:

$$\frac{d(x + iy)}{d(\lambda + iq)} = -i \frac{dx}{dq} + \frac{dy}{dq} \quad \text{und} \quad \frac{d(x - iy)}{d(\lambda - iq)} = i \frac{dx}{dq} + \frac{dy}{dq},$$

wo unter $\frac{dx}{dq}$ und $\frac{dy}{dq}$ die partiellen Differentialquotienten zu verstehn sind, so wird:

$$\frac{d(x + iy)}{d(\lambda + iq)} \frac{d(x - iy)}{d(\lambda - iq)} = \left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dq}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

Man überzeugt sich leicht, dass hier:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} c$$

ist, wo c die Convergenz des Meridians im Punkte λ , φ bedeutet (siehe §. 11 Anmerkung).

Für den natürlichen Logarithmus von m ergibt sich daher der Ausdruck:

$$l m = -l \left[a \cos \varphi \sqrt{\frac{1 + \delta}{1 + \delta \cos \varphi^2}} \right] + l \left(-\frac{dx}{dq} \right)^* + \frac{1}{2} l (1 + \operatorname{tg}^2 c^2)$$

den man auf folgende Weise in eine nach Potenzen von λ fortschreitende Reihe entwickeln kann.

Für den partiellen Differentialquotienten $\frac{dx}{dq}$ folgt aus der obern Reihe 4) (Seite 9):

$$-\frac{dx}{dq} = -\frac{ds}{dq} + \frac{1}{2} \frac{d^3 s}{dq^3} \lambda^2 - \frac{1}{24} \frac{d^5 s}{dq^5} \lambda^4 + \dots$$

und wenn man hierin die auf S. 10 gegebenen Werthe der Differentialquotienten substituirt und zur logarithmischen Form übergeht:

$$\begin{aligned} \alpha) \dots \dots \dots l \left(-\frac{dx}{dq} \right) &= l \left[a \cos \varphi \sqrt{\frac{1 + \delta}{1 + \delta \cos \varphi^2}} \right] - \frac{\lambda^2}{2} \left[1 - 2 \cos \varphi^2 - \delta \cos \varphi^4 \right] \\ &\quad - \frac{\lambda^4}{12} \left[1 + 4 \cos \varphi^2 - (6 - 26 \delta) \cos \varphi^4 - (30 \delta - 32 \delta^2) \cos \varphi^6 \right. \\ &\quad \left. - (37 \delta^2 - 12 \delta^3) \cos \varphi^8 - 14 \delta^3 \cos \varphi^{10} \right] - \dots \end{aligned}$$

*) Da der Differentialquotient $\frac{dx}{dq}$ negativ ist, so ist ihm hier das Minuszeichen vorgesetzt.

Ferner ist:

$$\frac{1}{2} l(1 + \operatorname{tg} c^2) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} c^2 - \frac{1}{4} \operatorname{tg} c^4 + \dots$$

und wenn man hierin den in der Anmerkung des vorigen §. gegebenen Werth von $\operatorname{tg} c$ einführt und nach λ ordnet:

$$\beta) \quad \frac{1}{2} l(1 + \operatorname{tg} c^2) = \frac{\lambda^2 \sin \varphi^2}{2} + \frac{\lambda^4 \sin \varphi^2}{12} \left[1 + 3 \cos \varphi^2 + 12 \delta \cos \varphi^4 + 8 \delta^2 \cos \varphi^6 \right] + \dots$$

Die Reihen α) und β) sind in dem obigen Werthe von lm zu substituiren, wodurch man die gesuchte Reihe für den natürlichen Logarithmus von m erhält, nämlich:

$$17) \quad \dots \quad lm = \frac{\lambda^2 (1 + \delta \cos \varphi^2) \cos \varphi^2}{2} - \frac{\lambda^4 (1 + \delta \cos \varphi^2) \cos \varphi^2}{12} \left[2 - (3 - 12 \delta) \cos \varphi^2 \right. \\ \left. - (15 \delta - 12 \delta^2) \cos \varphi^4 - 14 \delta^2 \cos \varphi^6 \right] + \dots$$

Für das Vergrößerungsverhältniss selbst ergibt sich hieraus, indem man zugleich λ Secunden bedeuten lässt:

$$m = 1 + \frac{\lambda^2 (1 + \delta \cos \varphi^2) \cos \varphi^2}{2 \varphi^2} - \frac{\lambda^4 (1 + \delta \cos \varphi^2) \cos \varphi^2}{24 \varphi^4} \left[4 - (9 - 24 \delta) \cos \varphi^2 \right. \\ \left. - (33 \delta - 24 \delta^2) \cos \varphi^4 - 28 \delta^2 \cos \varphi^6 \right] + \dots$$

Man erhält hieraus folgende numerische Formeln, wo λ Grade bedeutet:

$$\text{Für } \varphi = 50^\circ: \quad m = 1 + 0.63103 \cdot \left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 - 0.050 \cdot \left(\frac{\lambda}{100}\right)^4 + \dots$$

$$,, \quad \varphi = 51^\circ: \quad m = 1 + 0.60480 \cdot \left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 - 0.071 \cdot \left(\frac{\lambda}{100}\right)^4 + \dots$$

$$,, \quad \varphi = 52^\circ: \quad m = 1 + 0.57876 \cdot \left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 - 0.091 \cdot \left(\frac{\lambda}{100}\right)^4 + \dots$$

$$,, \quad \varphi = 53^\circ: \quad m = 1 + 0.55296 \cdot \left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 - 0.108 \cdot \left(\frac{\lambda}{100}\right)^4 + \dots$$

$$,, \quad \varphi = 54^\circ: \quad m = 1 + 0.52742 \cdot \left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 - 0.123 \cdot \left(\frac{\lambda}{100}\right)^4 + \dots$$

$$,, \quad \varphi = 55^\circ: \quad m = 1 + 0.50217 \cdot \left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 - 0.136 \cdot \left(\frac{\lambda}{100}\right)^4 + \dots$$

Zur Uebersicht diene noch folgende kleine Tafel:

Vergrößerungsverhältniss m .

φ	λ					
	0	$\pm 1^\circ$	$\pm 2^\circ$	$\pm 3^\circ$	$\pm 4^\circ$	$\pm 5^\circ$
50 ⁰	1	1.00006	1.00025	1.00057	1.00101	1.00158
51	1	1.00006	1.00024	1.00054	1.00097	1.00151
52	1	1.00006	1.00023	1.00052	1.00093	1.00145
53	1	1.00006	1.00022	1.00050	1.00088	1.00138
54	1	1.00005	1.00021	1.00047	1.00084	1.00132
55	1	1.00005	1.00020	1.00045	1.00080	1.00125

Wie man sieht, ist für alle Punkte des Hauptmeridians $m = 1$, d. h. jeder Bogen des Hauptmeridians ist seinem Bilde an Länge gleich, wie es die in §. 5 unter 2) gegebene Bedingung der Projection vorschreibt.

§. 13.

Berechnung des Vergrößerungsverhältnisses aus den Coordinaten.

Aus dem im vorigen Paragraph für m^2 gegebenen Ausdrücke folgt:

$$\frac{1}{m^2} = \frac{a^2 (1 + \delta) \cos \varphi^2}{1 + \delta \cos \varphi^2} \frac{d(\lambda + iq)}{d(x + iy)} \frac{d(\lambda - iq)}{d(x - iy)},$$

wo die Factoren $\frac{d(\lambda + iq)}{d(x + iy)}$ und $\frac{d(\lambda - iq)}{d(x - iy)}$ die Ableitungen der complexen Functionen $\lambda + iq$ und $\lambda - iq$ resp. nach $x + iy$ und $x - iy$ bedeuten. Da man hat:

$$\frac{d(\lambda + iq)}{d(x + iy)} = \frac{d\lambda}{dx} - i \frac{d\lambda}{dy} \quad \text{und} \quad \frac{d(\lambda - iq)}{d(x - iy)} = \frac{d\lambda}{dx} + i \frac{d\lambda}{dy},$$

so wird:

$$\frac{d(\lambda + iq)}{d(x + iy)} \frac{d(\lambda - iq)}{d(x - iy)} = \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 = \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

Unter $\frac{d\lambda}{dx}$ und $\frac{d\lambda}{dy}$ sind die partiellen Differentialquotienten zu verstehn. Diese ergeben sich aus der untern Gleichung 10) (S. 23). Ferner überzeugt man sich leicht, dass $\frac{dy}{dx}$ hier dieselbe Bedeutung hat, wie im §. 12, also:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} c.$$

Der hyperbolische Logarithmus von m wird hiernach:

$$lm = -l \left[a \cos \varphi \sqrt{\frac{1 + \delta}{1 + \delta \cos \varphi^2}} \right] - l \left(\frac{d\lambda}{dy} \right) - \frac{1}{2} l (1 + \operatorname{tg}^2 c).$$

Jeder der 3 Logarithmen auf der rechten Seite dieser Gleichung ist in eine nach Potenzen von y fortschreitende Reihe zu entwickeln, wozu man auf folgende Weise gelangen kann.

Man setze:

$$l \left[a \cos \varphi \sqrt{\frac{1 + \delta}{1 + \delta \cos \varphi^2}} \right] = f(\varphi),$$

Dann ist:

$$l \left[a \cos \chi \sqrt{\frac{1 + \delta}{1 + \delta \cos \chi^2}} \right] = f(\chi).$$

Indem hier der Hülfswinkel χ die frühere Bedeutung behält, giebt die obere Reihe 11) (S. 25):

$$f(\varphi) = f(x + z) = f(x) + \frac{d.f(x)}{dx} z + \frac{1}{2} \frac{d^2.f(x)}{dx^2} z^2 + \dots$$

wo der Kürze wegen:

$$z = - \frac{(1 + \delta \cos x^2)^2 \sin x}{2 a^2 (1 + \delta) \cos x} y^2 + \frac{(1 + \delta \cos x^2)^3 \sin x}{24 a^4 (1 + \delta)^2 \cos x^3} \left[3 + (2 - 9 \delta) \cos x^2 + 10 \delta \cos x^4 - 4 \delta^2 \cos x^6 \right] y^4 - \dots$$

gesetzt ist. Aus dem obigen Werthe von $f(x)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{d.f(x)}{dx} &= - \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \delta \cos x^2} \\ \frac{d^2.f(x)}{dx^2} &= - \frac{1 + 3 \delta \cos x^2 - 2 \delta \cos x^4}{(1 + \delta \cos x^2) \cos x^2}. \end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe in obiger Reihe, stellt zugleich die Werthe von $f(\varphi)$, $f(x)$ und z wieder her und ordnet nach y , so kommt:

$$\begin{aligned} \alpha) \dots l \left[a \cos \varphi \sqrt{\frac{1 + \delta}{1 + \delta \cos \varphi^2}} \right] &= l \left[a \cos x \sqrt{\frac{1 + \delta}{1 + \delta \cos x^2}} \right] + \frac{(1 + \delta \cos x^2) \sin x^2}{2 a^2 (1 + \delta) \cos x^2} y^2 \\ &- \frac{(1 + \delta \cos x^2)^2 \sin x^2}{12 a^4 (1 + \delta)^2 \cos x^4} \left[3 + \cos x^2 + 2 \delta \cos x^4 - 2 \delta^2 \cos x^6 \right] y^4 + \dots \end{aligned}$$

Für den partiellen Differentialquotienten $\frac{d\lambda}{dy}$ giebt die untere Reihe 10) (S. 23):

$$\frac{d\lambda}{dy} = - \frac{dq_0}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d^3 q_0}{dx^3} y^2 - \frac{1}{24} \frac{d^5 q_0}{dx^5} y^4 + \dots$$

und indem man hierin die auf Seite 23 gegebenen Werthe der Differentialquotienten substituirt und zur logarithmischen Form übergeht:

$$\begin{aligned} \beta) \dots l \left(\frac{d\lambda}{dy} \right) &= - l \left[a \cos x \sqrt{\frac{1 + \delta}{1 + \delta \cos x^2}} \right] - \frac{1 + \delta \cos x^2}{2 a^2 (1 + \delta) \cos x^2} \left[2 - \cos x^2 + \delta \cos x^4 \right] y^2 \\ &+ \frac{(1 + \delta \cos x^2)^2}{12 a^4 (1 + \delta)^2 \cos x^4} \left[6 - 4 \cos x^2 - (1 + 2 \delta) \cos x^4 + (2 \delta + 2 \delta^2) \cos x^6 \right. \\ &\quad \left. - (5 \delta^2 - 12 \delta^3) \cos x^8 - 14 \delta^3 \cos x^{10} \right] y^4 - \dots \end{aligned}$$

Endlich ist noch:

$$\frac{1}{2} l(1 + \operatorname{tg} c^2) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} c^2 - \frac{1}{4} \operatorname{tg} c^4 + \dots$$

und wenn man hierin den Werth von $\operatorname{tg} c$ aus Gleichung 14) (S. 31) setzt, und nach y ordnet:

$$\begin{aligned} \gamma) \dots \frac{1}{2} l(1 + \operatorname{tg} c^2) &= \frac{(1 + \delta \cos x^2) \sin x^2}{2 a^2 (1 + \delta) \cos x^2} y^2 - \frac{(1 + \delta \cos x^2)^2 \sin x^2}{12 a^4 (1 + \delta)^2 \cos x^4} \left[3 + \cos x^2 - 4 \delta \cos x^4 \right. \\ &\quad \left. - 8 \delta^2 \cos x^6 \right] y^4 + \dots \end{aligned}$$

Die Reihen unter α), β) und γ) sind in dem obigen Werthe von lm zu substituiren. Man erhält:

$$18) \quad lm = \frac{(1 + \delta \cos \chi^2)^2}{2a^2(1 + \delta)} y^2 - \frac{(1 + \delta \cos \chi^2)^3}{12a^4(1 + \delta)^2} \left[1 - (\delta - 12\delta^2) \cos \chi^2 - 14\delta^2 \cos \chi^4 \right] y^4 + \dots$$

Für das Vergrößerungsverhältniss selbst ergibt sich hieraus folgende Reihe:

$$19) \quad m = 1 + \frac{(1 + \delta \cos \chi^2)^2}{2a^2(1 + \delta)} y^2 + \frac{(1 + \delta \cos \chi^2)^3}{24a^4(1 + \delta)^2} \left[1 + (5\delta - 24\delta^2) \cos \chi^2 + 28\delta^2 \cos \chi^4 \right] y^4 + \dots$$

§. 14.

Bestimmung des Unterschiedes zwischen den Azimuthen einer auf die Ebene projecirten geodätischen Linie und der zwischen denselben Endpunkten enthaltenen Geraden.

Es seien A und B zwei Punkte auf der Ellipsoidfläche, und a und b ihre Projectionen auf der Ebene. Es bezeichne F die geodätische Linie AB in unbestimmter Ausdehnung betrachtet, f ihre Darstellung auf der Ebene, und g die durch a und b gezogene Gerade. Jeder Punkt in g werde bestimmt durch seinen Abstand ξ vom Punkte a ; jeder Punkt von f durch seinen senkrechten Abstand η von g und durch das dem Fusspunkte dieses Perpendikels zukommende ξ .

Ein Element von f wird durch

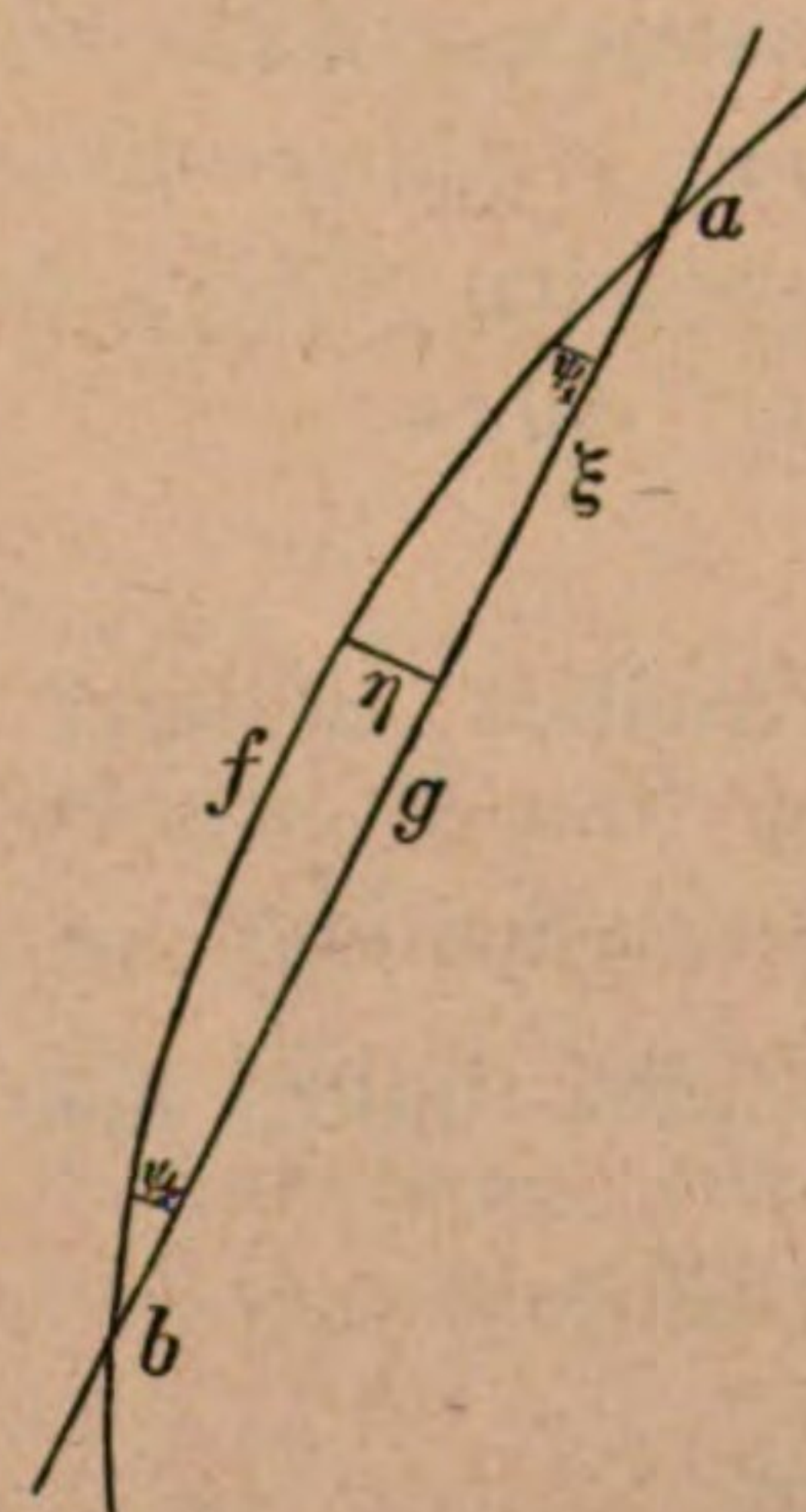
$$\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$$

oder durch

$$\frac{d\xi}{\cos \psi}$$

ausgedrückt, wenn man

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg} \psi$$



setzt, wo mithin ψ die Neigung des Elements gegen die Parallele mit g bedeutet.

Das, wie oben, mit m bezeichnete Vergrößerungsverhältniss beim Uebertragen von der ellipsoidischen Fläche auf die Ebene kann hier wie eine Function von ξ und η betrachtet werden. Die Grösse des Elements von F , dem jenes Element von f entspricht, wird

$$a) \quad \dots \dots \dots \frac{1}{m} d\xi \sqrt{1 + \frac{d\eta^2}{d\xi^2}} = \frac{d\xi}{m \cos \psi}.$$

Die Natur der Linie f wird also durch die Bedingung bestimmt, dass zwischen irgend welchen bestimmten Grenzen das Integral

$$\int \frac{1}{m} d\xi \sqrt{1 + \frac{d\eta^2}{d\xi^2}}$$

ein Minimum werden soll, wofür nach den Regeln der Variationsrechnung sich die Gleichung ergibt:

$$\frac{d \cdot \frac{1}{m}}{d\eta} \sqrt{1 + \frac{d\eta^2}{d\xi^2}} - \frac{d \cdot \frac{\frac{d\eta}{d\xi}}{m \sqrt{1 + \frac{d\eta^2}{d\xi^2}}}}{d\xi} = 0$$

oder:

$$b) \dots \dots \dots - \frac{1}{m} \frac{d.lm}{d\eta} \frac{d\xi}{\cos \psi} = d \cdot \frac{\sin \psi}{m}.$$

Unter $\frac{d.lm}{d\eta}$ ist hier der partielle Differentialquotient zu verstehn. Diese Formel ist strenge und allgemein gültig.

Für vorliegenden Zweck genügt es jedoch, die Entfernung ab nicht grösser anzunehmen, als sie in einem wirklich messbaren Dreiecke für eine Seite vorkommen kann. Unter dieser Voraussetzung wird in allen Punkten des zwischen a und b liegenden Stücks der Curve f der Winkel ψ nur sehr kleine Werthe haben und man darf daher

$$1 \text{ statt } \cos \psi \text{ und } \operatorname{tg} \psi \text{ statt } \sin \psi$$

schreiben; mithin:

$$- \frac{d.lm}{m d\eta} d\xi = d \cdot \frac{\operatorname{tg} \psi}{m},$$

woraus, indem man

$$\frac{d.lm}{d\eta} = n$$

setzt:

$$\frac{\operatorname{tg} \psi}{m} = \operatorname{const} - \int \frac{n}{m} d\xi.$$

Da auch η nur sehr kleine Werthe haben kann, so darf man ferner in dieser Formel anstatt der Werthe, welche m und $n = \frac{d.lm}{d\eta}$ in der Linie f haben, diejenigen anwenden, welche in den correspondirenden Punkten der Linie g (für $\eta = 0$) Statt finden, d. h. man kann jene Grössen, die im Allgemeinen Functionen von ξ und η sind, hier als Functionen von ξ allein betrachten.

Es sei nun die Entfernung $ab = r$ und es seien ψ_1, m_1, n_1 die bestimmten Werthe von ψ, m, n im Punkte a , und ψ_2, m_2, n_2 die im Punkte b . Die obige Formel wird dann:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{m \operatorname{tg} \psi_1}{m_1} - m \int \frac{n}{m} d\xi,$$

wo die Integration von $\xi = 0$ anfängt. Um diese ausführen zu können, entwickelt man n und m in nach Potenzen von ξ fortschreitende Reihen. Es sei:

$$c) \dots \dots \dots \begin{cases} n = n_1 + \nu \xi + \nu_1 \xi^2 + \dots \\ m = m_1 [1 + \mu \xi + \mu_1 \xi^2 + \mu_2 \xi^3 + \dots] \end{cases}$$

Dann ergibt die Rechnung:

$$\operatorname{tg} \psi = [1 + \mu \xi + \mu_1 \xi^2 + \dots] \operatorname{tg} \psi_1 - n_1 \xi - \frac{1}{2} (\nu + n_1 \mu) \xi^2 - (\frac{1}{3} \nu_1 + \frac{1}{6} \nu \mu - \frac{1}{6} n_1 \mu^2 + \frac{2}{3} n_1 \mu_1) \xi^3 - \dots$$

und hieraus, weil $\eta = \int d\xi \operatorname{tg} \psi$:

$$d) \dots \dots \eta = [\xi + \frac{1}{2} \mu \xi^2 + \frac{1}{3} \mu_1 \xi^3 + \dots] \operatorname{tg} \psi_1 - \frac{1}{2} n_1 \xi^2 - \frac{1}{6} (\nu + n_1 \mu) \xi^3 - (\frac{1}{12} \nu_1 + \frac{1}{24} \nu \mu - \frac{1}{24} n_1 \mu^2 + \frac{1}{6} n_1 \mu_1) \xi^4 - \dots$$

wo keine Constante hinzuzufügen ist, weil für $\xi = 0$ auch $\eta = 0$ wird.

Da nun auch für $\xi = r$, $\eta = 0$ wird, so folgt aus dieser Gleichung:

$$e) \dots \dots \operatorname{tg} \psi_1 = \frac{1}{2} n_1 r + (\frac{1}{6} \nu - \frac{1}{12} n_1 \mu) r^2 + (\frac{1}{12} \nu_1 - \frac{1}{24} \nu \mu) r^3 + \dots$$

Wird in der Gleichung für $\operatorname{tg} \psi$ auch anstatt ξ der Werth r und anstatt $\operatorname{tg} \psi_1$ der eben gefundene substituirt, so ergibt sich:

$$f) \dots \operatorname{tg} \psi_2 = -\frac{1}{2} n_1 r - (\frac{1}{3} \nu + \frac{1}{12} n_1 \mu) r^2 - (\frac{1}{4} \nu_1 + \frac{1}{24} \nu \mu - \frac{1}{12} n_1 \mu^2 + \frac{1}{6} n_1 \mu_1) r^3 - \dots$$

Die Formeln e) und f) werden die gesuchten Azimuthunterschiede ψ_1 und ψ_2 in den Punkten a und b liefern, sobald die Grössen n_1 , ν , ν_1 , μ , μ_1 bestimmt sind. Es sollen diese Grössen nur so weit entwickelt werden, als nöthig ist, um schliesslich die Werthe von $\operatorname{tg} \psi_1$ und $\operatorname{tg} \psi_2$ bis incl. zur 3. Ordnung genau zu erhalten, wenn man unter den Coordinaten x , y , in Theilen der grossen Halbachse a der Meridianellipse ausgedrückt, Grössen 1. Ordnung versteht.

Es sei θ der Winkel, den die Gerade ab , im Sinne wachsender ξ , mit der Abscissenachse, im Sinne wachsender x genommen, macht, den Winkel von dieser zu jener in dem Sinne von der Linken nach der Rechten gezählt. Dann ist:

$$g) \dots \dots \dots \begin{cases} dx = \cos \theta d\xi - \sin \theta d\eta \\ dy = \sin \theta d\xi + \cos \theta d\eta \end{cases}$$

folglich der partielle Differentialquotient:

$$n = \frac{d.lm}{d\eta} = \frac{d.lm}{dx} \frac{dx}{d\eta} + \frac{d.lm}{dy} \frac{dy}{d\eta} = -\sin \theta \frac{d.lm}{dx} + \cos \theta \frac{d.lm}{dy}.$$

Der Kürze wegen soll nun einstweilen die grosse Halbachse $a = 1$ gesetzt, und sollen folgende Abkürzungen gebraucht werden:

$$V = \frac{1 + \delta \cos \chi^2}{1 + \delta}, \quad s = \sin \chi, \quad c = \cos \chi.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung

$$h) \dots \dots \dots \frac{d\chi}{dx} = -(1 + \delta) V^{\frac{3}{2}} \quad (\text{siehe §. 8. S. 23}).$$

hat man dann:

$$\frac{d \cdot V^2}{dx} = 4\delta V^{\frac{5}{2}} s c.$$

Die Gleichung 18) (Seite 39), von der hier nur das 1. Glied gebraucht wird, erhält die Form:

$$lm = \frac{1}{2}(1 + \delta) V^2 y^2 - \dots$$

Durch Substitution der sich hieraus ergebenden Werthe der Differentialquotienten $\frac{d \cdot lm}{dx}$ und $\frac{d \cdot lm}{dy}$ erhält man:

$$n = (1 + \delta) V^2 y \cos \theta - 2\delta(1 + \delta) V^{\frac{5}{2}} s c y^2 \sin \theta + \dots$$

Bezeichnet man die Coordinaten des Punktes a mit x_1, y_1 , und die Werthe, welche die Grössen V, s, c in diesem Punkte haben, resp. mit V_1, s_1, c_1 , so folgt aus dieser Formel:

$$i) \dots \dots \dots n_1 = (1 + \delta) V_1^2 y_1 \cos \theta - 2\delta(1 + \delta) V_1^{\frac{5}{2}} s_1 c_1 y_1^2 \sin \theta + \dots$$

In der obern Reihe c) ist nach dem Maclaurin'schen Satze:

$$\nu = \frac{dn}{d\xi}, \quad \nu_1 = \frac{1}{2} \frac{d^2 n}{d\xi^2},$$

wenn in diesen Differentialquotienten nach ausgeführter Differentiation für die Grössen, welche von ξ abhängen, diejenigen bestimmten Werthe gesetzt werden, die sie im Punkte a (für $\xi = 0$) haben. Es ist nun:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{d\xi} &= \frac{dn}{dx} \frac{dx}{d\xi} + \frac{dn}{dy} \frac{dy}{d\xi} = \frac{dn}{dx} \cos \theta + \frac{dn}{dy} \sin \theta \\ &= (1 + \delta) V^2 \sin \theta \cos \theta + 4\delta(1 + \delta) V^{\frac{5}{2}} s c y (\cos \theta^2 - \sin \theta^2) + \dots \end{aligned}$$

Ferner findet man:

$$\frac{d^2 n}{d\xi^2} = 4\delta(1 + \delta) V^{\frac{5}{2}} s c (2 \sin \theta \cos \theta^2 - \sin \theta^3) + \dots$$

Folglich:

$$k) \dots \dots \dots \begin{cases} \nu = (1 + \delta) V_1^2 \sin \theta \cos \theta + 4\delta(1 + \delta) V_1^{\frac{5}{2}} s_1 c_1 y_1 (\cos \theta^2 - \sin \theta^2) + \dots \\ \nu_1 = 2\delta(1 + \delta) V_1^{\frac{5}{2}} s_1 c_1 (2 \sin \theta \cos \theta^2 - \sin \theta^3) + \dots \end{cases}$$

Behuf Entwicklung der Grössen $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots$ hat man aus der untern Reihe c):

$$lm = lm_1 + \mu \xi + (\mu_1 - \frac{1}{2} \mu^2) \xi^2 + (\mu_2 - \mu \mu_1 + \frac{1}{3} \mu^3) \xi^3 + \dots$$

Nach dem Maclaurin'schen Satze ist:

$$lm = lm_1 + \frac{d.lm}{d\xi} \xi + \frac{1}{2} \frac{d^2.lm}{d\xi^2} \xi^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3.lm}{d\xi^3} \xi^3 + \dots$$

für die im Punkte a stattfindenden Werthe der Differentialquotienten. Die Vergleichung beider Reihen giebt:

$$\mu = \frac{d.lm}{d\xi}, \quad \mu_1 = \frac{1}{2} \frac{d^2.lm}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \mu^2, \quad \mu_2 = \frac{1}{6} \frac{d^3.lm}{d\xi^3} + \mu \mu_1 - \frac{1}{3} \mu^3$$

für die im Punkte a Statt findenden Werthe der Differentialquotienten. Aus dem auf voriger Seite gegebenen Ausdrücke für lm folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen g) und h):

$$\frac{d.lm}{d\xi} = (1 + \delta) V^2 y \sin \theta + 2 \delta (1 + \delta) V^{\frac{5}{2}} s c y^2 \cos \theta + \dots$$

$$\frac{d^2.lm}{d\xi^2} = (1 + \delta) V^2 \sin^2 \theta + 8 \delta (1 + \delta) V^{\frac{5}{2}} s c y \sin \theta \cos \theta + \dots$$

$$\frac{d^3.lm}{d\xi^3} = 12 \delta (1 + \delta) V^{\frac{5}{2}} s c \sin \theta^2 \cos \theta + \dots$$

Mithin ist:

$$1) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \mu = (1 + \delta) V_1^2 y_1 \sin \theta + 2 \delta (1 + \delta) V_1^{\frac{5}{2}} s_1 c_1 y_1^2 \cos \theta + \dots \\ \mu_1 = \frac{1}{2} (1 + \delta) V_1^2 \sin^2 \theta + 4 \delta (1 + \delta) V_1^{\frac{5}{2}} s_1 c_1 y_1 \sin \theta \cos \theta + \dots \\ \mu_2 = 2 \delta (1 + \delta) V_1^{\frac{5}{2}} s_1 c_1 \sin \theta^2 \cos \theta + \dots \end{array} \right.$$

Die unter i), k) und l) gegebenen Werthe sind nun in den Reihen e) und f) zu substituieren, wobei übrigens, da höhere Ordnungen als die 3. vernachlässigt werden, die Grössen μ, μ_1, μ_2 gar nicht in Frage kommen. (Diese Grössen werden im folgenden §. gebraucht). Man erhält:

$$\operatorname{tg} \psi_1 = + \frac{1}{6} (1 + \delta) V_1^2 \left\{ \begin{array}{l} 3 r y_1 \cos \theta \\ + r^2 \sin \theta \cos \theta \end{array} \right. - \frac{1}{6} \delta (1 + \delta) V_1^{\frac{5}{2}} s_1 c_1 \left\{ \begin{array}{l} 6 r y_1^2 \sin \theta \\ - 4 r^2 y_1 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ - r^3 (2 \sin \theta \cos \theta^2 - \sin^3 \theta) \end{array} \right.$$

$$\operatorname{tg} \psi_2 = - \frac{1}{6} (1 + \delta) V_1^2 \left\{ \begin{array}{l} 3 r y_1 \cos \theta \\ + 2 r^2 \sin \theta \cos \theta \end{array} \right. + \frac{1}{6} \delta (1 + \delta) V_1^{\frac{5}{2}} s_1 c_1 \left\{ \begin{array}{l} 6 r y_1^2 \sin \theta \\ - 8 r^2 y_1 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ - r^3 (6 \sin \theta \cos \theta^2 - 3 \sin^3 \theta) \end{array} \right.$$

Bezeichnet man noch die Coordinaten des Punktes b mit x_2, y_2 , so ist:

$$r \cos \theta = x_2 - x_1 \text{ und } r \sin \theta = y_2 - y_1.$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man bis incl. zur 3. Ordnung genau: *)

$$\text{m) } \begin{cases} \operatorname{tg} \psi_1 = \frac{1}{6} (1 + \delta) V_1^2 (x_2 - x_1) (2y_1 + y_2) \\ \quad - \frac{1}{6} \delta (1 + \delta) V_1^{\frac{5}{2}} s_1 c_1 \left\{ \left[2y_1^2 + (y_1 + y_2)^2 \right] (y_2 - y_1) - 2(x_2 - x_1)^2 (y_1 + y_2) \right\} \\ \operatorname{tg} \psi_2 = -\frac{1}{6} (1 + \delta) V_1^2 (x_2 - x_1) (2y_2 + y_1) \\ \quad + \frac{1}{6} \delta (1 + \delta) V_1^{\frac{5}{2}} s_1 c_1 \left\{ \left[2y_2^2 + (y_1 + y_2)^2 \right] (y_2 - y_1) - 2(x_2 - x_1)^2 (y_1 + 3y_2) \right\} \end{cases}$$

Wenn man sich bei der Anwendung dieser Formeln auf das erste Glied beschränkt, welches von der zweiten Ordnung ist, so kann man die Genauigkeit der Formeln dadurch erhöhen, dass man die Grössen V_1, s_1, c_1 , die der Abscisse x_1 entsprechen, durch andere V, s, c ersetzt, deren Argument eine zweckmässig gewählte zwischen x_1 und x_2 liegende Abscisse ist. Diese letztere werde durch $x_1 + h(x_2 - x_1)$ bezeichnet, wo mithin h eine noch näher zu bestimmende zwischen 0 und 1 liegende Constante ist. Der Taylor'sche Satz giebt dann:

$$\begin{aligned} V_1^2 &= V^2 - 4h(x_2 - x_1)\delta V^{\frac{5}{2}}sc + \dots \\ V_1^{\frac{5}{2}}s_1c_1 &= V^{\frac{5}{2}}sc - \dots \end{aligned}$$

Mit diesen Gliedern kann man sich begnügen, da jedes folgende Glied auf die Werthe von $\operatorname{tg} \psi_1$ und $\operatorname{tg} \psi_2$ bis incl. zur 3. Ordnung ohne Einfluss ist. Substituirt man diese Werthe in der Formel für $\operatorname{tg} \psi_1$, so wird man leicht den Werth $h = \frac{1}{3}$ als den zweckmässigsten erkennen, denn man erhält hiermit:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi_1 &= +\frac{1}{6} (1 + \delta) V^2 (x_2 - x_1) (2y_1 + y_2) \\ &\quad - \frac{1}{6} \delta (1 + \delta) V^{\frac{5}{2}} sc \left\{ \left[2y_1^2 + (y_1 + y_2)^2 \right] - \frac{2}{3} (x_2 - x_1)^2 \right\} (y_2 - y_1), \end{aligned}$$

wo also die Werthe V, s, c der Abscisse $x_1 + \frac{1}{3}(x_2 - x_1)$ entsprechen.

Die Formel für $\operatorname{tg} \psi_2$ erhält man hieraus einfach durch Vertauschung der Punkte a und b , nämlich:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi_2 &= -\frac{1}{6} (1 + \delta) V^2 (x_2 - x_1) (y_1 + 2y_2) \\ &\quad + \frac{1}{6} \delta (1 + \delta) V^{\frac{5}{2}} sc \left\{ \left[2y_2^2 + (y_1 + y_2)^2 \right] - \frac{2}{3} (x_2 - x_1)^2 \right\} (y_2 - y_1) \end{aligned}$$

wo die Werthe V, s, c der Abscisse $x_2 - \frac{1}{3}(x_2 - x_1)$ entsprechen.

*) Dass die Formeln m) bis zur 3. Ordnung einschliesslich genau sind, würde durch ihre Ableitung unmittelbar erwiesen sein, wenn nicht in Formel b), die noch in aller Strenge richtig ist, zur Vereinfachung der weitem Entwicklung der Factor $\frac{1}{\cos \psi}$ weggelassen, $\operatorname{tg} \psi$ statt $\sin \psi$ und in den Werthen von m und n , $\eta = 0$ gesetzt wäre. Wenn man jedoch beachtet, dass die Grössen m, n, ψ , und η resp. von der Ordnung 0, 1, 2, und 3 sind, so überzeugt man sich leicht, dass diese Aenderungen erst in der 4. Ordnung auf die Werthe von $\operatorname{tg} \psi_1$ und $\operatorname{tg} \psi_2$ influiren können.

Dasselbe Resultat erhält man auch aus der untern Gleichung m), wenn man darin die Werthe V_1, s_1, c_1 , die der Abscisse x_1 entsprechen, durch die zur Abscisse $x_2 - \frac{1}{3}(x_2 - x_1)$ oder $x_1 + \frac{2}{3}(x_2 - x_1)$ gehörigen Werthe V, s, c ersetzt, wofür man hat:

$$\begin{aligned} V_1^2 &= V^2 - \frac{8}{3}(x_2 - x_1)\delta V^{\frac{5}{2}}sc + \dots \\ V_1^{\frac{5}{2}}s_1c_1 &= V^{\frac{5}{2}}sc - \dots \end{aligned}$$

Es ist leicht zu erkennen, in wie fern durch die für den Werth von h getroffene Wahl, der oben angegebene Vorthail erreicht ist: es besteht nämlich jetzt in beiden Formeln das Glied der 3. Ordnung aus zwei einander stets entgegengesetzten Theilen, die mit Hinweglassung des gemeinschaftlichen Factors $\mp \frac{1}{6}\delta(1+\delta)V^{\frac{5}{2}}sc$ folgende sind:

$$\begin{aligned} \text{für } \operatorname{tg} \psi_1 &\dots \left[2y_1^2 + (y_1 + y_2)^2 \right] (y_2 - y_1) - \frac{2}{3}(x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1) \\ \text{„ } \operatorname{tg} \psi_2 &\dots \left[2y_2^2 + (y_1 + y_2)^2 \right] (y_2 - y_1) - \frac{2}{3}(x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1). \end{aligned}$$

Für jeden andern Werth von h wird der erste Theil derselbe, der zweite Theil aber erhält, je nach den Werthen der Ordinaten y_1 und y_2 , entweder in $\operatorname{tg} \psi_1$ oder $\operatorname{tg} \psi_2$ nicht nur einerlei Zeichen mit dem ersten, sondern kann auch bedeutend grössere Werthe annehmen, als in den obigen Formeln.*) Es folgt hieraus, dass in den letztern der Absolutwerth des Gliedes 3. Ordnung, d. i. der durch Beschränkung auf die 2. Ordnung verursachte Fehler, nicht so grosse Werthe erhalten kann, als in solchen aus irgend einem andern Werthe von h hervorgehenden Formeln.

Die Coordinaten sind bisher als in Theilen der grossen Halbachse a ausgedrückt verstanden. Sind sie in irgend einem Längenmaasse gegeben, so ist das Glied der 2. Ordnung in jeder Formel durch a^2 , und das der 3. durch a^3 zu dividiren. — Man kann ferner ψ_1 und ψ_2 statt $\operatorname{tg} \psi_1$ und $\operatorname{tg} \psi_2$ setzen, indem jene Grössen erst in der 6. Ordnung von diesen sich unterscheiden, und man erhält dann die Winkel ψ_1 und ψ_2 in Secunden, wenn man auf der rechten Seite jedes Glied noch mit ϱ multiplicirt. — Stellt man noch die Werthe von V, s, c wieder her, und schreibt:

$$\begin{aligned} y_1 + \frac{1}{3}(y_2 - y_1) &\text{ statt } \frac{1}{3}(2y_1 + y_2), \\ y_2 - \frac{1}{3}(y_2 - y_1) &\text{ statt } \frac{1}{3}(2y_2 + y_1), \end{aligned}$$

so erhalten die Formeln folgende Gestalt:

*) Um dies deutlich hervortreten zu lassen, kann man die am nächsten sich darbietenden Substitutionen $h=0$ und $h=\frac{1}{2}$ als Beispiele benutzen. Im ersten Falle entsprechen die Abscissen x_1 und x_2 (jene in $\operatorname{tg} \psi_1$, diese in $\operatorname{tg} \psi_2$), im zweiten die Abscisse $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ (in beiden Formeln) den Grössen V, s, c .

Man kann das Argument für diese Grössen noch auf mancherlei Weise derart bestimmen, dass das Glied der 3. Ordnung kleine Absolutwerthe erhält und selbst ganz verschwindet. Dann aber wird dieses Argument immer eine gebrochene Function der 4 Grössen x_1, y_1, x_2, y_2 . Abgesehen von der complicirten zur Rechnung unbequemen Form ist ein solches Argument überall nicht anwendbar, weil es beliebig grosse Werthe annehmen kann, und weil, wenn es um die Einheit (d. i. hier die grosse Halbachse) oder mehr von x_1 oder x_2 differirt, die Reihen für $\operatorname{tg} \psi_1$ und $\operatorname{tg} \psi_2$ ihre Convergenz verlieren.

$$\begin{aligned}\psi_1 &= + \frac{\varrho (1 + \delta \cos \chi^2)^2}{2 a^2 (1 + \delta)} (x_2 - x_1) \left[y_1 + \frac{1}{3} (y_2 - y_1) \right] \\ &\quad - \frac{\varrho \delta (1 + \delta \cos \chi^2)^{\frac{5}{2}} \sin \chi \cos \chi}{18 a^3 (1 + \delta)^{\frac{3}{2}}} (y_2 - y_1) \left[6 y_1^2 + 3 (y_1 + y_2)^2 - 2 (x_2 - x_1)^2 \right] \\ \psi_2 &= - \frac{\varrho (1 + \delta \cos \chi^2)^2}{2 a^2 (1 + \delta)} (x_2 - x_1) \left[y_2 - \frac{1}{3} (y_2 - y_1) \right] \\ &\quad + \frac{\varrho \delta (1 + \delta \cos \chi^2)^{\frac{5}{2}} \sin \chi \cos \chi}{18 a^3 (1 + \delta)^{\frac{3}{2}}} (y_2 - y_1) \left[6 y_2^2 + 3 (y_1 + y_2)^2 - 2 (x_2 - x_1)^2 \right]\end{aligned}$$

Hierin bedeutet χ die Breite desjenigen Punktes des Hauptmeridians, welchem die Abscisse $x_1 + \frac{1}{3}(x_2 - x_1)$ oder jene $x_2 - \frac{1}{3}(x_2 - x_1)$ entspricht. Erstere ist in der Formel für ψ_1 , letztere in der Formel für ψ_2 anzuwenden.

Wenn man sich auf die 2. Ordnung beschränkt, so ist also zu setzen:

$$20) \dots\dots\dots \begin{cases} \psi_1 = + H (x_2 - x_1) \left[y_1 + \frac{1}{3} (y_2 - y_1) \right] \\ \psi_2 = - H (x_2 - x_1) \left[y_2 - \frac{1}{3} (y_2 - y_1) \right] \end{cases} \quad *)$$

Der Logarithmus des Factors:

$$H = \frac{\varrho (1 + \delta \cos \chi^2)^2}{2 a^2 (1 + \delta)}$$

kann für das Argument χ aus der Tafel II. entnommen werden. Da jedoch die Projection eine sehr häufige Anwendung der Formeln 20) erfordert, so ist die Einrichtung der Tafel III. vorzuziehen, wodurch die Berechnung des Winkels χ aus der zugehörigen Abscisse erspart wird. Diese Tafel ist für das Argument $\log H$ berechnet, welches mit Einheiten der 5. Decimalstelle fortschreitet. Die andere mit x überschriebene Columnne enthält in Metern die Abscisse, die dem Mittelwerthe aus den beiden zunächst stehenden Werthen von $\log H$ entspricht. So z. B. sind die Abscissen -45742^m und -57162^m resp. für die Werthe $\log H = 1.403515 - 10$ und $\log H = 1.403505 - 10$ berechnet, und es entspricht daher allen Abscissen, die zwischen -45742^m und -57162^m liegen, der Werth $\log H = 1.40351 - 10$. Der Gebrauch der Tafel ergibt sich daraus von selbst.

Die Formeln 20) geben die Werthe von ψ_1 und ψ_2 um so schärfer, je kleiner die Länge der betreffenden Linie und ihre Entfernung vom Hauptmeridian ist. Nimmt man diese gleich 200000^m , und jene gleich 60000^m (ungefähr 8 geogr. Meilen, eine für Dreiecksseiten nicht ungewöhnliche Länge), so kann der Fehler in den Werthen von ψ_1 und ψ_2 nahezu $\frac{1}{100}$ Secunde betragen.

Will man eine grössere Schärfe erreichen, oder die angegebenen Grenzen erweitern, so muss nicht nur das Glied der 3. Ordnung, sondern auch das der 4.

*) Vergl. Briefwechsel etc. Bd. II. S. 265.

berücksichtigt werden, indem dieses innerhalb bestimmter Grenzen der Anwendung grössere Werthe erhalten kann, als jenes.

Die Bestätigung dieser Bemerkungen ergibt sich aus Zusatz I. A, welcher eine Erweiterung der Entwicklungen dieses Paragraphen enthält (siehe unten die Formeln 34) dieses Zusatzes).

In dem Hannoverschen Dreieckssystem kommen die grössten Azimuthunterschiede ψ_1 und ψ_2 an der westlichen Grenze vor, weil hier die Entfernung vom Hauptmeridian am grössten ist. Es diene daher die an der Holländischen Grenze gelegene Dreiecksseite Bentheim-Kirchesepe als Beispiel. Es ist:

$\begin{array}{rcl} \text{Bentheim} \dots x_1 & = & - 89758^m \\ \text{Kirchesepe} \dots x_2 & = & - 125442 \\ \hline x_2 - x_1 & = & - 35684 \\ \frac{1}{3}(x_2 - x_1) & = & - 11895 \\ x_1 + \frac{1}{3}(x_2 - x_1) & = & - 101653 \\ x_2 - \frac{1}{3}(x_2 - x_1) & = & - 113547 \\ \\ y_1 + \frac{1}{3}(y_2 - y_1) \dots & 5.27363 \\ x_2 - x_1 \dots & 4.55247^{(n)} \\ H \dots & 1.40347 \\ \psi_1 \dots & 1.22957^{(n)} \\ \psi_1 & = & - 16''.966 \end{array}$	$\begin{array}{rcl} y_1 & = & + 190025^m \\ y_2 & = & + 183266 \\ \hline y_2 - y_1 & = & - 6759 \\ \frac{1}{3}(y_2 - y_1) & = & - 2253 \\ y_1 + \frac{1}{3}(y_2 - y_1) & = & + 187772 \\ y_2 - \frac{1}{3}(y_2 - y_1) & = & + 185519 \\ \\ y_2 - \frac{1}{3}(y_2 - y_1) \dots & 5.26839 \\ x_2 - x_1 \dots & 4.55247^{(n)} \\ H \dots & 1.40346 \\ \psi_2 \dots & 1.22432 \\ \psi_2 & = & + 16''.762 \end{array}$
--	---

Nach den Formeln 34) des Zusatzes I. A. findet man genauer:

$$\psi_1 = - 16''.960; \quad \psi_2 = + 16''.756.$$

Wenn man die Lage der betreffenden Linie ab vor Augen hat, so kann man während der Berechnung die Vorzeichen in so weit ausser Acht lassen, als sie blos dazu dienen, die Vorzeichen von ψ_1 und ψ_2 zu bestimmen. Ueber diese lässt sich nämlich leicht entscheiden, wenn man beachtet, dass die Projection einer geodätischen Linie immer concav gegen die Abscissenachse sein muss.

Als zweites Beispiel diene die Seite Bentheim-Dörenberg. Hier ist:

$\begin{array}{rcl} \text{Bentheim} \dots x_1 & = & - 89758^m \\ \text{Dörenberg} \dots x_2 & = & - 73684 \\ \hline x_2 - x_1 & = & 16074 \\ \frac{1}{3}(x_2 - x_1) & = & 5358 \\ x_1 + \frac{1}{3}(x_2 - x_1) & = & 84400 \\ x_2 - \frac{1}{3}(x_2 - x_1) & = & 79042 \\ \\ y_1 + \frac{1}{3}(y_2 - y_1) \dots & 5.22985 \\ x_2 - x_1 \dots & 4.20613 \\ H \dots & 1.40348 \\ \psi_1 \dots & 0.83946 \\ \psi_1 & = & + 6''.9097 \end{array}$	$\begin{array}{rcl} y_1 & = & + 190025^m \\ y_2 & = & + 129246 \\ \hline y_2 - y_1 & = & 60779 \\ \frac{1}{3}(y_2 - y_1) & = & 20260 \\ y_1 + \frac{1}{3}(y_2 - y_1) & = & 169765 \\ y_2 - \frac{1}{3}(y_2 - y_1) & = & 149506 \\ \\ y_2 - \frac{1}{3}(y_2 - y_1) \dots & 5.17466 \\ x_2 - x_1 \dots & 4.20613 \\ H \dots & 1.40349 \\ \psi_2 \dots & 0.78428 \\ \psi_2 & = & - 6''.0853 \end{array}$
---	---

Nach den Formeln 34) des Zusatzes I. A. findet man genauer:

$$\psi_1 = + 6''.9129; \quad \psi_2 = - 6''.0875.$$

Diese Beispiele zeigen auch, dass zur Berechnung der Winkel ψ_1 und ψ_2 keineswegs die genauen Werthe der Coordinaten x_1, y_1, x_2, y_2 erforderlich sind, sondern dass für diese vielmehr selbst eine ganz rohe Annäherung in den meisten Fällen völlig ausreichend ist.

§. 15.

Relation zwischen der Länge einer geodätischen Linie und der Länge der zwischen den Projectionen ihrer Endpunkte enthaltenen Geraden.

Zufolge des Ausdrucks a) des vorigen Paragraphen wird die Länge R der geodätischen Linie zwischen den Punkten A und B auf dem Ellipsoid, denen auf der Ebene die Punkte a und b entsprechen, ausgedrückt durch das Integral:

$$R = \int_0^r \frac{d\xi}{m \cos \psi}$$

wo r die Länge der Geraden ab bezeichnet.

Es wird immer erlaubt sein, $\cos \psi = 1$ und für m denjenigen Werth zu setzen welcher in der Linie g oder für $\eta = 0$ gilt, indem hierdurch, wie leicht nachzuweisen, der Werth von R erst in der 5. Ordnung abgeändert wird. Setzt man daher für m die im vorigen Paragraph unter c) gegebene Reihe und führt die Integration aus, so kommt:

$$R = \frac{r}{m_1} \left[1 - \frac{1}{2} \mu r - \left(\frac{1}{3} \mu_1 - \frac{1}{3} \mu^2 \right) r^2 - \left(\frac{1}{4} \mu_2 - \frac{1}{2} \mu \mu_1 + \frac{1}{4} \mu^3 \right) r^3 - \dots \right]$$

woraus:

$$lr = lR + lm_1 + \frac{1}{2} \mu r + \left(\frac{1}{3} \mu_1 - \frac{5}{24} \mu^2 \right) r^2 + \left(\frac{1}{4} \mu_2 - \frac{1}{3} \mu \mu_1 + \frac{1}{8} \mu^3 \right) r^3 + \dots$$

Den Werth von lm_1 erhält man aus Gleichung 18), indem man darin y_1 statt y , und χ_1 statt χ setzt. Die Werthe von μ, μ_1, μ_2 sind im vorigen Paragraph unter l) gegeben. Substituirt man diese Werthe in obiger Gleichung, so erhält man bis incl. zur 3. Ordnung genau:

$$lr = lR + \frac{1}{6} (1 + \delta) V_1^2 \left\{ \begin{array}{l} 3y_1^2 \\ + 3y_1 r \sin \theta \\ + r^2 \sin^2 \theta \end{array} \right. + \frac{1}{6} \delta (1 + \delta) V_1^{\frac{5}{2}} s_1 c_1 \left\{ \begin{array}{l} 6y_1^2 r \cos \theta \\ + 8y_1 r^2 \sin \theta \cos \theta \\ + 3r^3 \sin^2 \theta \cos \theta \end{array} \right.$$

und wenn man hierin $x_2 - x_1$ statt $r \cos \theta$ und $y_2 - y_1$ statt $r \sin \theta$ setzt, wo x_1, y_1 und x_2, y_2 die Coordinaten der Punkte a und b bedeuten:

$$lr = lR + \frac{1}{6} (1 + \delta) V_1^2 (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) + \frac{1}{6} \delta (1 + \delta) V_1^{\frac{5}{2}} s_1 c_1 (y_1^2 + 2y_1 y_2 + 3y_2^2) (x_2 - x_1) + \dots$$

Die zur Abscisse x_1 gehörigen Grössen V_1, s_1, c_1 ersetzt man zweckmässig durch jene der Abscisse $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ entsprechenden V, s, c . Es ist:

$$V_1^2 = V^2 - 2\delta V^{\frac{5}{2}} s c (x_2 - x_1) + \dots$$

$$V_1^{\frac{5}{2}} s_1 c_1 = V^{\frac{5}{2}} s c - \dots$$

und durch Substitution dieser Werthe erhält man:

$$\begin{aligned} l r = l R + \frac{1}{6} (1 + \delta) V^2 (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \\ + \frac{1}{6} \delta (1 + \delta) V^{\frac{5}{2}} s c (y_1 + y_2) (y_2 - y_1) (x_2 - x_1) + \dots \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, dass der Absolutwerth des Gliedes 3. Ordnung im Allgemeinen in dieser Formel kleiner ausfällt, als in der vorhergehenden. Man wird also, wenn man dieses Glied vernachlässigt, nach der zuletzt gegebenen Formel schärfer rechnen.

Um diese zum Gebrauche herzurichten, erinnere man sich, dass als Lineareinheit die grosse Halbachse a angenommen ist. Legt man irgend ein anderes Längenmaass zu Grunde, so ist zu setzen: $\frac{r}{a}, \frac{R}{a}, \frac{x_1}{a}$ etc. statt r, R, x_1 , etc. Geht man ferner zu den Briggischen Logarithmen über, restituirt die Werthe von V, s, c , wobei die Breite des der Abscisse $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ entsprechenden Punktes des Hauptmeridians mit χ bezeichnet werden möge und setzt endlich statt $(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$ den für die Rechnung bequemern Ausdruck: $\frac{3}{4}(y_1 + y_2)^2 + \frac{1}{4}(y_1 - y_2)^2$, so geht die obige Formel in die folgende über:

$$\begin{aligned} \log r = \log R + \frac{M(1 + \delta \cos \chi^2)^2}{24 a^2 (1 + \delta)} \left[3(y_1 + y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \right] \\ + \frac{M \delta (1 + \delta \cos \chi^2)^{\frac{5}{2}} \sin \chi \cos \chi}{6 a^3 (1 + \delta)^{\frac{3}{2}}} (y_1 + y_2) (y_1 - y_2) (x_1 - x_2) + \dots \end{aligned}$$

Man kann in allen Fällen, auf welche der Gebrauch dieser Formel beschränkt bleiben muss, das Glied der 3. Ordnung vernachlässigen.

Will man beim numerischen Rechnen die Tafel III. benutzen, und das Glied der 2. Ordnung in Einheiten der 7. Decimalstelle von $\log R$ erhalten, so setze man:

$$H = \frac{\varrho (1 + \delta \cos \chi^2)^2}{2 a^2 (1 + \delta)}; \quad \alpha = \frac{10^7 \cdot M}{4 \varrho}, \quad \alpha_1 = \frac{10^7 \cdot M}{12 \varrho}.$$

Dann ist:

$$21) \dots \dots \dots \log r - \log R = H \left[\alpha (y_1 + y_2)^2 + \alpha_1 (y_1 - y_2)^2 \right] ^*)$$

wo

*) Vergl. Briefwechsel etc. Bd. II., S. 264.

$$\log \alpha = 0.72130 \quad \text{und} \quad \log \alpha_1 = 0.24418$$

und $\log H$ für die Abscisse $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ aus Tafel III. zu entnehmen ist.

Für Linien, welche die Länge wirklich messbarer Dreiecksseiten nicht übersteigen und deren Endpunkte nicht weiter als 200000 Meter vom Hauptmeridian sich entfernen, giebt diese Formel die Differenz $\log r - \log R$ bis auf 4 Einheiten der 8. Decimalstelle genau.

Wie in den Werthen von ψ_1 und ψ_2 kann auch hier das Glied der 4. Ordnung grössere Werthe annehmen, als das der 3. Will man daher die angegebenen Grenzen erweitern, oder eine grössere Schärfe erreichen, so müssen beide Glieder Berücksichtigung finden.

In Zusatz I. B. sind die Entwicklungen dieses Paragraphen in diesem Sinne erweitert (siehe die Formeln 35) dieses Zusatzes).

Als erstes Beispiel diene die Reduction der Dreiecksseite Hamburg-Hohenhorn auf die Ebene. Diese Seite vertritt für die Hannoversche Landesvermessung die Stelle einer Basis, da eine besondere Basis für diese nicht gemessen wurde. Gauss hat dafür angenommen in Metern:

$$\log R = 4.431\,0013 \text{ *)}$$

*) Vergl. „Briefwechsel etc. Gauss an Schumacher, den 22. December 1827“, und ferner die im Jahre 1828 erschienene Schrift von Gauss „Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona“, wo auf S. 74 die Länge dieser Seite zu

$$13841.815 \text{ Toisen}$$

angegeben wird: genau übereinstimmend mit dem obigen Werthe von $\log R$.

Es lässt sich ferner direct aus den im Gauss'schen Coordinatenverzeichnisse enthaltenen Coordinaten der Punkte Hamburg und Hohenhorn nachweisen, dass diese Seitenlänge eine spätere Correction nicht mehr erfahren hat. Nach jenem Verzeichniss ist nämlich:

$$\begin{array}{l} \text{Hamburg, Michaelisthurm} \dots x_1 = -224765.173; \quad y_1 = -2369.933 \\ \text{Hohenhorn} \dots \dots \dots x_2 = -216781.593; \quad y_2 = -28139.131 \end{array}$$

Hieraus ergibt sich die Entfernung r der beiden Punkte auf der Ebene nach den Formeln:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \theta, \quad r = \frac{y_2 - y_1}{\sin \theta}$$

Die weitere Rechnung ist daher folgende:

$$\begin{array}{rcl} y_2 - y_1 & \dots & 4.411\,1009.2 \\ x_2 - x_1 & \dots & 3.902\,1977.0 \\ \hline \operatorname{tg} \theta & \dots & 0.508\,9032.2 \\ \hline \sin \theta & \dots & 9.980\,0981.2 \\ \hline \log r & = & 4.431\,0028.0 \\ \text{Red} & \dots & -15.35 \quad (\text{siehe das erste Beispiel}) \\ \hline \log R & = & 4.431\,0013 \end{array}$$

Die analoge Rechnung für die Holstein'sche Basis ist im zweiten Beispiel gegeben.

Es ist:

$$\begin{array}{ll} \text{Hamburg, Michaelisthurm} \dots x_1 = -224765^m & y_1 = -2370^m \\ \text{Hohenhorn} \dots x_2 = -216781 & y_2 = -28139 \\ & y_1 + y_2 = 30509 \dots 4.48443 \\ & y_1 - y_2 = 25769 \dots 4.41109 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \log R = 4.4310013 \\ \text{Red. ad pl.} = 15 \\ \log r = 4.4310028 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (y_1 + y_2)^2 \dots 8.96886 \\ a \dots 0.72130 \\ H \dots 1.40336 \\ \hline 1.09352 \dots 12.403 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (y_1 - y_2)^2 \dots 8.82218 \\ a_1 \dots 0.24418 \\ H \dots 1.40336 \\ \hline 0.46972 \dots 2.949 \\ \hline 15.352 \end{array}$$

Als zweites Beispiel diene die von Schumacher bei Braak in Holstein gemessene Basis. Nach dem Gauss'schen Coordinatenverzeichniss ist:

$$\text{Basis, nördlicher Endpunkt} \dots x_1 = -235123^m.955; \quad y_1 = -17692^m.547$$

$$\text{Basis, südlicher Endpunkt} \dots x_2 = -230098.884; \quad y_2 = -20737.025$$

Aus diesen Coordinaten möge die Länge der Basis auf dem Ellipsoid berechnet werden.

Die Länge r der entsprechenden Geraden auf der Ebene erhält man nach der Formel:

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

oder

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \theta_1; \quad r = \frac{x_2 - x_1}{\cos \theta_1}.$$

Die Rechnung mit siebenstelligen Logarithmen ist daher:

$$\begin{array}{l} y_2 - y_1 = 3044.478 \dots 3.4835128.5 \\ x_2 - x_1 = 5025.071 \dots 3.7011422.1 \\ \operatorname{tg} \theta \dots 9.7823706.4 \\ \cos \theta \dots 9.9321056.4 \\ \log r = 3.7690365.7 \\ \text{Red.} = -19.7 \\ \log R = 3.7690346^*) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y_1 + y_2 = 38430 \dots 4.58467 \\ (y_1 + y_2)^2 \dots 9.16934 \\ a \dots 0.72130 \\ H \dots 1.40335 \\ \hline 1.29399 \dots 19.678 \\ (y_2 - y_1)^2 \dots 6.96703 \\ a_1 \dots 0.24418 \\ H \dots 1.40335 \\ \hline 8.61456 \dots 0.041 \\ \hline 19.719 \end{array}$$

*) In neuester Zeit ist von dänischer Seite eine Revision der über die Basismessung vorhandenen Papiere vorgenommen, woraus sich als Länge der Basis ergeben hat:

$$R = 3014.45115 \text{ Toisen.}$$

(Siehe Generalbericht über die mitteleuropäische Gradmessung für das Jahr 1864). In Metern folgt hieraus:

$$\log R = 3.7690166.$$

Die Vergleichung dieses Werthes mit dem obigen ergibt, dass den Logarithmen sämtlicher von Gauss gegebenen Coordinaten, Dreiecksseiten, etc. die Correction -0.0000180 hinzugefügt werden muss, um sie mit der revidirten Basislänge in Uebereinstimmung zu bringen.

Dieses Resultat kann höchstens um eine Einheit der 7. Decimalstelle schwankend sein, vorausgesetzt dass die Berechnung der oben gegebenen Coordinaten der Basisendpunkte, oder vielmehr nur der Uebergang von den Coordinaten des einen Endpunkts zu denen des andern, so scharf ausgeführt ist, wie siebenstellige Logarithmen es gestatten.

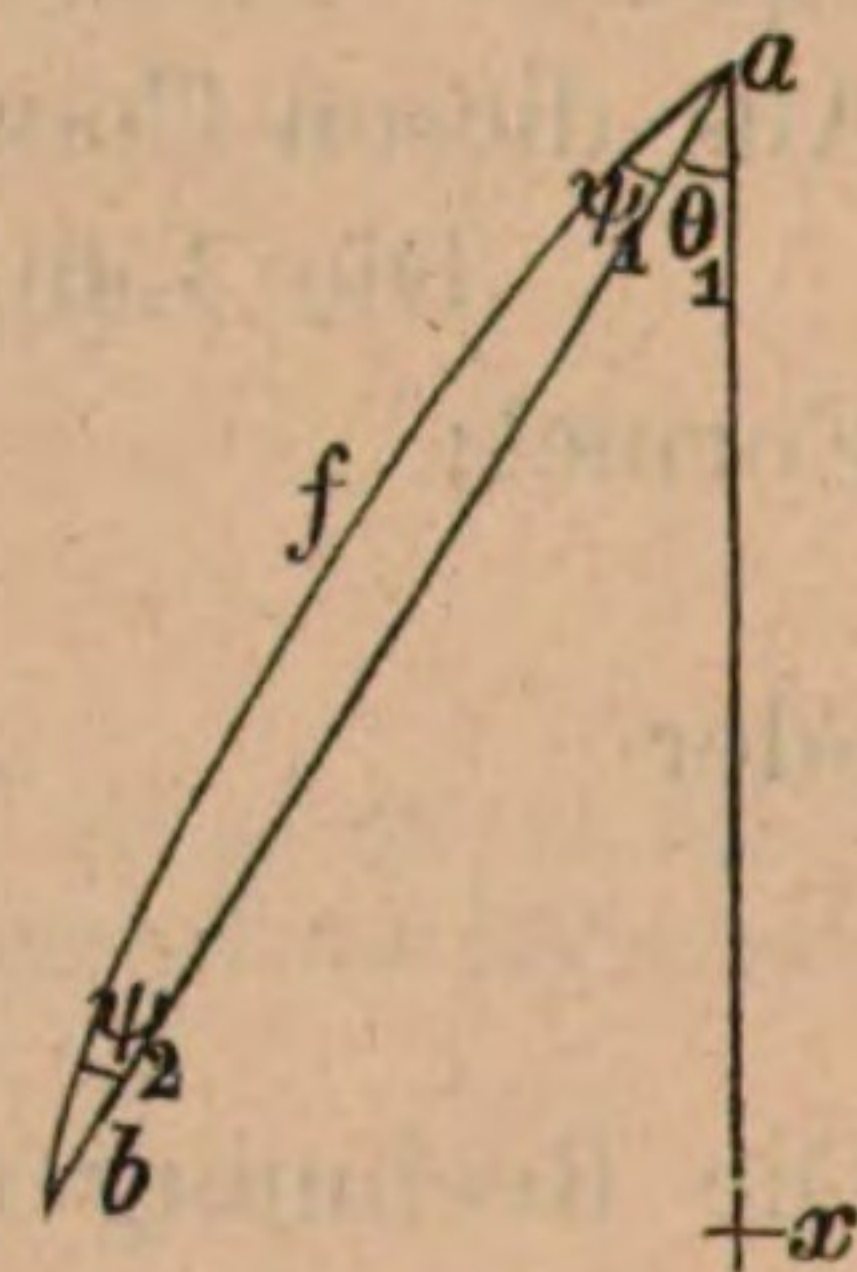
§. 16.

Uebertragung der trigonometrischen Messungen auf die Ebene.

Es bleibt noch übrig, auf die in der Einleitung unter Nr. 2. angedeuteten Uebertragungen näher einzugehn. Es soll dabei ein auf der Ellipsoidfläche durch geodätische Linien gebildetes System von Dreiecken vorausgesetzt werden, worin sämtliche Winkel, die Länge wenigstens einer Seite und das Azimuth wenigstens einer Seite genau bekannt sind.*)

Die zu diesen Uebertragungen erforderlichen Entwicklungen sind in den beiden vorigen Paragraphen enthalten. Einige Erläuterungen werden die Anwendung derselben vollständig klar machen.

Gauss unterscheidet Azimuth in plano und Azimuth auf dem Sphäroid. Beide Benennungen weichen von dem, was man nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche unter Azimuth versteht (dem astronomischen Azimuth) ab. Es seien A, B zwei Punkte auf dem Sphäroid, und a, b ihre Bilder auf der Ebene. Dann ist der Winkel θ_1 , den die Gerade ab mit der positiven Richtung der Abscissenachse macht, das Azimuth in plano von ab , oder vom Punkte b im Punkte a . Dieser Winkel wird von 0° bis 360° im Sinne derjenigen Drehung gezählt, durch welche die positive x -Richtung in die positive y -Richtung auf dem kürzesten Wege übergeführt wird, also von links nach rechts. Sind x_1, y_1 die Coordinaten von a und x_2, y_2 die von b , so ist also:



$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Den Winkel T_1 , den auf der Ellipsoidfläche die Linie AB im Punkte A mit derjenigen Curve macht, deren Darstellung auf der Ebene eine durch den Punkt a gehende Parallele zur x -Achse ist, nennt Gauss das Azimuth von AB auf dem Sphäroid. Dieser Winkel wird in demselben Sinne gezählt, wie der Winkel θ_1 .

Bezeichnet t_1 das astronomische Azimuth von AB , so hat man nach §. 11 Anmerkung:

$$a) \dots\dots\dots T_1 = t_1 + c$$

wo c die Convergenz des Meridians in A bedeutet.

Das Azimuth in plano und das Azimuth auf dem Sphäroid sollen in der Folge schlechtweg Azimuth genannt werden, und darunter das eine oder das andere ver-

*) Ueber die Reductionen, denen die beobachteten Winkel und unmittelbar gemessenen Linien zu unterwerfen sind, ehe sie in aller Strenge als Winkel und Seiten solcher Dreiecke angesehen werden können, vergl. unter Andern: „Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche von J. J. Baeyer. Berlin. 1862. §§. 17, 18, 20, 21 und 24.“

standen werden, jenachdem von Punkten auf der Ebene oder von Punkten auf der Ellipsoidfläche die Rede ist.

Es sei nun afb die Darstellung der Linie AB , und ψ_1 und ψ_2 die Winkel, die sie in den Punkten a und b mit der Geraden ab macht. Da zwei von einem Punkte ausgehende Linien auf der Ellipsoidfläche denselben Winkel mit einander machen, wie ihre Darstellungen auf der Ebene, so wird man haben:

$$\beta) \dots\dots\dots T_1 = \theta_1 + \psi_1$$

und da im Punkte b das Azimuth von $a = 180^\circ + \theta_1$, so ist im Punkte B das Azimuth von BA :

$$\gamma) \dots\dots\dots T_2 = 180^\circ + \theta_1 + \psi_2 = \theta_2 + \psi_2.$$

Für den Fall, dass die Linie AB eine geodätische Linie (Dreiecksseite) ist, erhält man die Winkel ψ_1 und ψ_2 mittelst der Formeln 20) (Seite 46).

In dem sphäroidischen Dreieckssystem ist das Azimuth wenigstens einer Seite als bekannt vorausgesetzt. Hierunter ist aber das astronomische Azimuth zu verstehn, welches sich durch unmittelbare Messung bestimmen lässt, während man das Azimuth auf dem Sphäroid im Allgemeinen nur durch Rechnung aus solchen Daten erhalten kann, die sich erst aus der Berechnung des übertragenen Dreieckssystems ergeben (siehe Gleichung α).

Da jedoch für alle Punkte des Hauptmeridians der Convergenzwinkel $c = 0$ ist (§. 11), so hat man nach Gleichung α) für eine vom Anfangspunkte ausgehende Dreiecksseite: $T_1 = t_1$. Ist daher das Azimuth einer solchen Dreiecksseite bekannt, so sieht man leicht, dass man, vom Anfangspunkte ausgehend, durch wiederholte Anwendung der Gleichungen β) und γ) schrittweise die Azimuthe sämtlicher Seiten sowohl des ebenen als des sphäroidischen Dreieckssystems aus den Winkeln des letztern bestimmen kann.

Zur Uebertragung und vorläufigen Berechnung der Dreiecke reicht eine bis auf mehr Secunden angenäherte Orientirung vollkommen hin. Wenn daher die Seite, nach welcher später die mit der Ausgleichung der Winkel verbundene definitive Orientirung des Dreieckssystems geschieht und deren Azimuth auf das Schärfste bestimmt sein muss, nicht vom Anfangspunkte ausgeht, so ist in diesem Punkte eine provisorische Azimuthbestimmung von viel geringerer Schärfe auszuführen, was eben der geringen Schärfe wegen durch unmittelbare Messung leicht wird geschehn können. *)

Die Uebertragung derjenigen Dreiecksseiten, deren Länge auf dem Ellipsoid durch unmittelbare Messung (Basis) oder durch benachbarte trigonometrische Messungen (Anschlussseite) bekannt ist, geschieht nach Formel 21) (Seite 49).

Um nach den gegebenen Vorschriften die Reductionen der Richtungen und Seitenlängen berechnen zu können, ist eine genäherte Kenntniss der Coordinaten der Dreieckspunkte erforderlich, die nur durch Berechnung der Dreiecke zu erhalten ist.

*) Das Hannoversche Dreieckssystem ist nach der Seite Göttinger Sternwarte-Hohehagen orientirt, deren Azimuth von der Sternwarte aus auf das Genaueste bestimmt wurde.

Es muss daher eine vorläufige Berechnung, die nur von geringer Schärfe zu sein braucht, die Ausführung der Messungen Schritt für Schritt begleiten. Eine solche ist jedoch nicht bloß zum Zwecke der Uebertragungen, sondern auch in andern Beziehungen, namentlich zum Centriren der excentrisch gemessenen Winkel, nothwendig.

Man wird nicht immer im Stande sein, die absoluten Längen der Linien gleich zu Anfang der Messungen mit einer selbst für die vorläufige Berechnung hinreichenden Annäherung zu bestimmen. Allein dieser Umstand ist durchaus unerheblich, da man mit leichter Mühe die bereits ausgeführten Rechnungen corrigiren kann, sobald die Messung bis zu einer Basis oder Anschlussseite fortgeschritten ist und damit die zu einer schärfern Rechnung erforderlichen Daten liefert.

Beispiele zur Uebertragung der Richtung und Länge der Linien finden sich am Schlusse der §§. 14 und 15.

Die mit den Messungen von Dreieckspunkt zu Dreieckspunkt fortschreitende Uebertragung der Richtungen möge hier noch durch ein Beispiel erläutert werden, welches der von der Seite Steinberg-Bremen bis zur Seite Bentheim-Kirchheseppe sich erstreckenden Dreieckskette entnommen ist.

Standpunkt: Mordkuhlenberg.

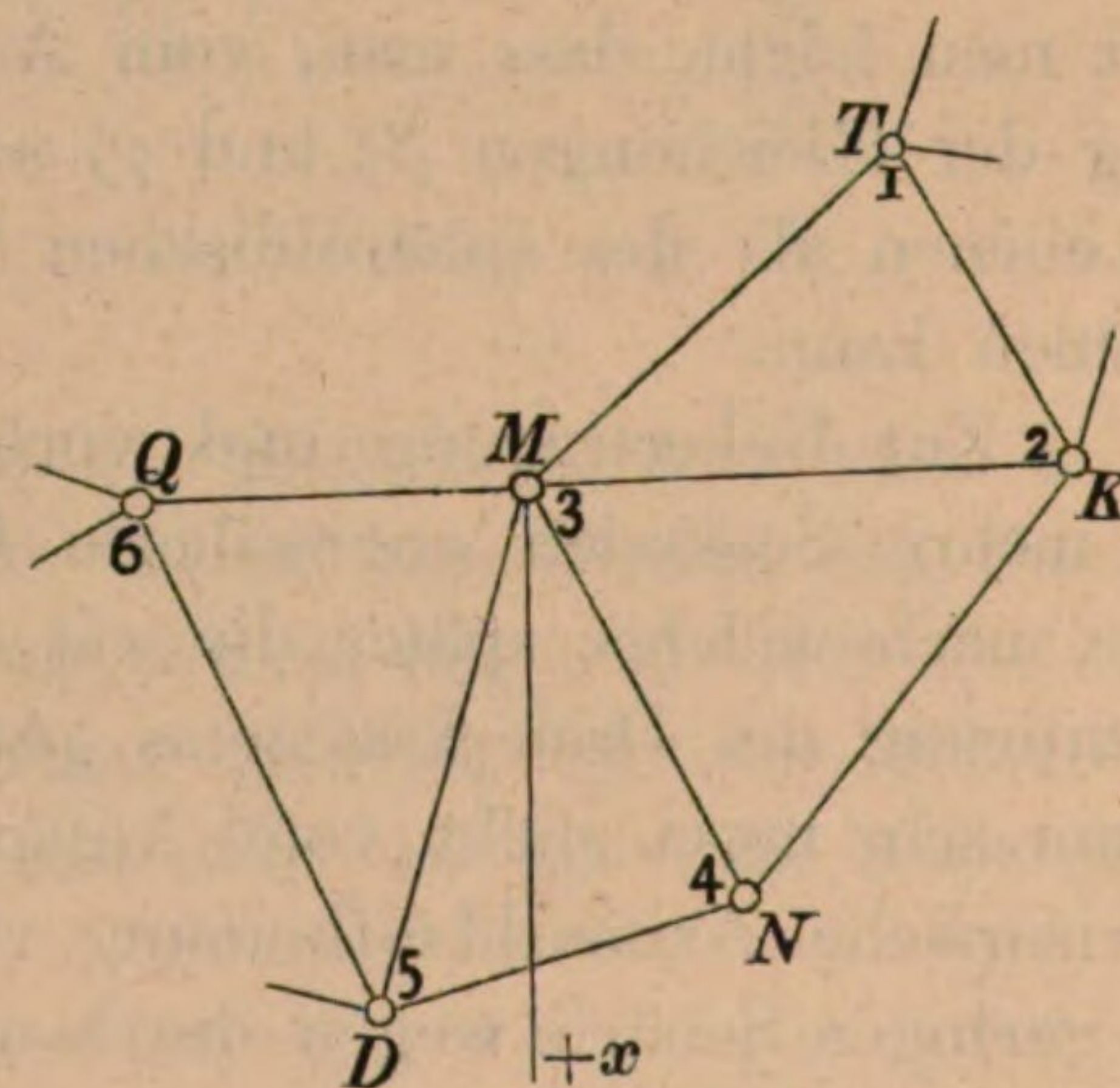
$$x_1 = -115363^m; y_1 = +117156^m.$$

$$\text{Dörenberg} \dots x_2 = -73684^m; y_2 = +129246^m$$

$$\text{Queckenberg} \dots x_2 = -114710; y_2 = +148301$$

$$\text{Nonnenstein} \dots x_2 = -82615; y_2 = +99921$$

	<i>D</i>	<i>Q</i>	<i>N</i>
$y_2 - y_1 =$	12090	31145	17235
$\frac{1}{3}(y_2 - y_1) =$	4030	10382	5745
$y_1 + \frac{1}{3}(y_2 - y_1) =$	121186	127538	111411
$y_2 - \frac{1}{3}(y_2 - y_1) =$	125216	137919	105666
$x_2 - x_1 =$	41679	653	32748
$\frac{1}{3}(x_2 - x_1) =$	14...	...	11...
$x_1 + \frac{1}{3}(x_2 - x_1) =$	101...	115...	104...
$x_2 - \frac{1}{3}(x_2 - x_1) =$	88...	115...	94...
$y_1 + \frac{1}{3}(y_2 - y_1) \dots$	5.08345	5.10564	5.04693
$x_2 - x_1 \dots$	4.61992	2.81491	4.51518
$H \dots$	1.40347	1.40345	1.40346
$T_1 - \theta_1 \dots$	1.10684	9.32400	0.96557
retour		retour	retour
$y_2 - \frac{1}{3}(y_2 - y_1) \dots$	5.09766	5.13962	5.02394
$x_2 - x_1 \dots$	4.61992	2.81491	4.51518
$H \dots$	1.40348	1.40345	1.40347
$T_2 - \theta_2 \dots$	1.12106	9.35798	0.94259



NB. Die den Dreieckspunkten beigesetzten Zahlen geben die Reihenfolge an, in welcher jene als Standpunkte gedient haben.

Visirpunkt	T_1 Az. a. d. Sphär.	$T_1 - \theta_1$ $= \psi_1$	$T_2 - \theta_2$ $= \psi_2$	θ_1 Az. in plano	T_2 Az. a. d. Sphär. retour
Dörenberg	16° 10' 41".574	+ 12".789	— 13".215	16° 10' 28".785	196° 10' 15" 570
Queckenberg	88 47 56 .808	+ 0 .211	— 0 .228	88 47 56 .597	268 47 56 .369
Twistringen	227 24 46 .418	—	—	227 24 53 .730	—
Knickberg	267 27 21 .123	—	—	267 27 21 .627	—
Nonnenstein	332 14 41 .632	+ 9 .238	— 8 .762	332 14 32 .394	152 14 23 .632

Eine derartige Rechnung ist für jeden Standpunkt zu führen, und zwar für alle von dem Standpunkte aus geschnittene Punkte (hier sind nur die Hauptdreieckspunkte berücksichtigt).

Die Azimuthe T_1 in der Tabelle ergeben sich unmittelbar aus den in M gemessenen Winkeln (und zwar, abgesehen von der Orientirung: allein aus diesen), nachdem diese unter sich ausgeglichen sind. Zur Orientirung sind die Richtungen MT und MK benutzt, deren Azimuthe aus vorangegangenen Messungen in den Punkten T und K auf dieselbe Weise gefunden wurden, wie hier die Azimuthe (T_2) von DM , QM , NM aus den Messungen in M . Jene Messungen haben ergeben:

$$\alpha) \dots \begin{cases} \text{Az. a. d. Sphär. } MT = 227^\circ 24' 47''.743 \\ \text{Az. a. d. Sphär. } MK = 267 \ 27 \ 19 \ .799 \end{cases}$$

$$\text{daraus folgt der Winkel } TMK = 40 \ 2 \ 32 \ .056$$

während die Messungen in M für denselben Winkel ergeben:

$$= 40 \ 2 \ 34 \ .705$$

$$\text{Differenz} = 2 \ .649$$

Da der letztere Winkel in der Tabelle beibehalten werden muss, weil diese nur die Messungen in M enthalten soll, so können die Azimuthe von MT und MK nicht genau mit jenen unter α) übereinstimmen. Es ist jedoch vortheilhaft, sowohl für die Genauigkeit der vorläufigen Berechnung der Coordinaten, als auch für die Bequemlichkeit der spätern Ausgleichung und definitiven Orientirung des übertragenen Dreieckssystems (siehe Einleitung, 3), wenn die Orientirungsfehler auf den einzelnen Standpunkten nur um wenige Secunden von einander abweichen. Man wird daher für die Azimuthe MT und MK ohne complicirte Rechnung zweckmässige Werthe erhalten, wenn man die halbe Differenz $\frac{2''.649}{2} = 1''.324.5$ der beiden für den Winkel TMK gefundenen Werthe von dem einen Azimuth unter α) subtrahirt und zu dem andern addirt.

Die Correctionen $T_1 - \theta_1$ und $T_2 - \theta_2$ ergeben sich aus der nach den Formeln 20) (S. 46) angestellten Rechnung, die jedoch nur für die zum ersten Mal vorkommenden Richtungen geführt zu werden braucht (weshalb die Richtungen MT und MK hier fehlen).

Bei der vorläufigen Berechnung der dazu erforderlichen Coordinaten kann anfangs das Azimuth auf dem Sphäroid anstatt des Azimuths in plano angewandt und nachher die Rechnung nöthigenfalls retouchirt werden. — Die Rechnungsrubriken für diejenigen Punkte, deren Coordinaten noch nicht bestimmt werden können, müssen so lange offen bleiben, bis die Messung die nöthigen Daten zu ihrer Berechnung liefert (für den Standpunkt M trat dieser Fall für die Punkte D und Q ein, die von M aus zum ersten Male geschnitten wurden). — Die Vorzeichen der Correctionen $T_1 - \theta_1$ und $T_2 - \theta_2$ ergeben sich aus der S. 47 gegebenen Regel. Ueberdiess haben die beiden Correctionen immer entgegengesetzte Zeichen, wenn nicht Standpunkt und Visirpunkt auf verschiedenen Seiten des Hauptmeridians liegen. In diesem, übrigens selten eintretenden Falle ist auch die erwähnte Regel zur Entscheidung über das Vorzeichen nicht ausreichend und man wird die Formel selbst zu Hülfe nehmen müssen.

Die Azimuthe θ_1 und T_2 erhält man einfach durch Subtraction und Addition der Correctionen $T_1 - \theta_1$ und $T_2 - \theta_2$ resp. zu den Azimuthen T_1 und $\theta_2 = 180^\circ + \theta_1$. — Für die Richtungen MT und MK ergiebt sich das Azimuth θ_1 auf dieselbe Weise, wie das Azimuth T_1 , aus den frühern Messungen. Diese haben geliefert:

$$\text{Az. in plano } MT = 227^\circ 24' 55''.055$$

$$\text{„ „ „ } MK = 267 \quad 27 \quad 20 \quad .303$$

Diesen Azimuthen sind dieselben Correctionen hinzuzufügen, wie jenen unter α), nämlich resp. $-\frac{2''.649}{2}$ und $+\frac{2''.649}{2}$, oder $-1''.325$ und $+1''.324$.

Das Azimuth T_2 braucht nur für die zum ersten Mal vorkommenden Richtungen, die auf nachfolgenden Standpunkten wieder zur Orientirung dienen können, in der Tabelle aufgenommen zu werden.

Zusatz I.

Entwicklung der Formeln für die Reduction des Azimuths und der Länge geodätischer Linien auf die Ebene bis zu Grössen 5. Ordnung incl.

Die vorstehend entwickelten Formeln sind zur Berechnung wirklich gemessener Dreiecke oder Dreieckssysteme vollkommen ausreichend, wenn die Dreiecke sich nicht zu weit (nicht über 2 bis 3 Längengrade) vom Hauptmeridian entfernen. Nur für eine so begrenzte Anwendung ist die Projection von Gauss bestimmt, und in der That auch nur für eine solche bequem zu handhaben, wie aus den vorstehenden Entwicklungen genugsam hervorgeht.

Für ein nach dieser Projection berechnetes Dreieckssystem (wie das Hannoversche) ist es jedoch wünschenswerth, innerhalb desselben auch grössere als wirklich messbare Dreiecke nach derselben Methode berechnen zu können. Zu diesem Zweck wird erfordert:

- 1) dass für jeden Punkt innerhalb des fraglichen Dreieckssystems die Länge, Breite und Convergenz aus den Coordinaten, und die Coordinaten aus Länge und Breite berechnet werden können;
- 2) dass aus den Coordinaten je zweier Punkte (mithin auch aus Länge und Breite je zweier Punkte) die Länge der entsprechenden geodätischen Linie und deren Azimuthe an den Endpunkten berechnet werden können.

Zur Lösung der unter 1) genannten Aufgaben sind die Formeln 9), 13) und 16) resp. in den §§. 7, 10 und 11 mehr wie ausreichend.

Die Lösung der unter 2) genannten Aufgabe erfordert eine grössere Ausdehnung der Entwicklungen der §§. 14 und 15.

Es sind daselbst die Formeln für die Azimuthunterschiede ψ_1 , ψ_2 und für die Differenz $\log r - \log R$ nur bis auf Grössen 3. Ordnung entwickelt, und für den Gebrauch ist nur das erste Glied derselben, welches von der zweiten Ordnung ist, hergerichtet. Es sollen diese Formeln nachstehend dergestalt erweitert werden, dass sie bei strenger Beibehaltung der 3. Decimalstelle der Secunde und der 8. Decimalstelle des Logarithmus der Länge r oder R , auf Linien bis zu 400000 Meter Länge

und 250000 Meter*) Abstand ihrer Endpunkte vom Hauptmeridian allgemein anwendbar sind,**) wobei es sich indessen von selbst versteht, dass der eine Grenzwert auf Kosten des andern vergrößert werden kann.

Es soll zu diesem Zwecke an die Untersuchungen der §§. 14 und 15 wieder angeknüpft, und die dort gebrauchten Bezeichnungen und Abkürzungen auch hier angewandt werden. Es ist jedoch erforderlich, für die Grössen $\sin \theta$ und $\cos \theta$ Abkürzungen einzuführen, wohingegen die für $\sin \chi$ und $\cos \chi$ wegfallen können. Es sollen deshalb die Abkürzungen s und c ihre bisherige Bedeutung ($\sin \chi$ und $\cos \chi$) verlieren und anstatt dessen gesetzt werden:

$$s = \sin \theta, \text{ und } c = \cos \theta.$$

Einige andere Abkürzungen werden da, wo sie zuerst auftreten, erklärt werden.

Des bequemern Zurückweisens wegen sollen Formeln und Gleichungen mit fortlaufender Nummer, also von 22) anfangend, bezeichnet werden.

Endlich sollen der Uebersicht wegen die bereits entwickelten Glieder hier stets wieder mit niedergeschrieben werden.

A. Entwicklung der Azimuthunterschiede ψ_1 und ψ_2 bis auf Grössen 5. Ordnung incl.

Das Gesetz der Linie f (§. 14) ist enthalten in den streng richtigen Gleichungen:

$$\frac{\sin \psi}{m} = C - \int \frac{n}{m} \frac{d\xi}{\cos \psi}$$

$$\eta = \int \operatorname{tg} \psi d\xi$$

wo die Integration von $\xi = 0$ anfängt. Für diesen Werth von ξ verschwindet das Integral in der obern Gleichung, und $\sin \psi$ und m gehn über in $\sin \psi_1$ und m_1 . Es ist daher $C = \frac{\sin \psi_1}{m_1}$, und folglich gleichfalls streng richtig:

$$22) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \sin \psi = \frac{m}{m_1} \sin \psi_1 - m \int \frac{n}{m} \frac{d\xi}{\cos \psi} \\ \eta = \int \operatorname{tg} \psi d\xi. \end{array} \right.$$

Es werde zunächst untersucht, welche der früher angewendeten Vereinfachungen in diesen Gleichungen erlaubt sind, wenn die 5. Ordnung in dem Werthe von ψ noch streng beibehalten werden soll.

Den Entwicklungen des §. 14 entnimmt man, dass m von der Ordnung Null, n von der 1., $\sin \psi$, $\operatorname{tg} \psi$ und ψ von der 2. Ordnung sind.

*) Auf einer Kugel von einem dem Aequator gleichen Umfange entsprechen diesen beiden Längen grösste Kreisbögen von resp. über $3\frac{1}{2}^\circ$ und $2\frac{1}{4}^\circ$.

**) Die Wahl dieser Grenzen ist weiter unten näher begründet.

Wegen $\frac{1}{\cos \psi} = (1 - \sin^2 \psi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \psi + \dots$ unterscheidet sich daher $\frac{1}{\cos \psi}$ vom Werthe 1 erst um eine Grösse 4. Ordnung; folglich der Werth des Integrals

$$\int \frac{n}{m} \frac{d\xi}{\cos \psi} \text{ von jenem } \int \frac{n}{m} d\xi$$

nur um eine Grösse 6. Ordnung. Man kann daher das letztere Integral statt des erstern setzen.

Ferner ist: $\sin \psi = \psi - \frac{1}{6} \psi^3 + \dots$ und $\operatorname{tg} \psi = \psi + \frac{1}{3} \psi^3 + \dots$. Diese Grössen unterscheiden sich mithin von einander und von ψ erst in der 6. Ordnung, und man kann daher ψ statt $\sin \psi$ und $\operatorname{tg} \psi$ schreiben.

Der Werth von ψ wird mithin bis auf die 5. Ordnung incl. genau ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$23) \dots \dots \dots \begin{cases} \psi = \frac{m}{m_1} \psi_1 - m \int \frac{n}{m} d\xi \\ \eta = \int \psi d\xi \end{cases}$$

Es sind ferner in §. 14 die Grössen m und n als Functionen von ξ allein betrachtet, so dass also statt der Werthe, welche diese Grössen in der Linie f haben, diejenigen angewendet sind, die in den correspondirenden Punkten der Linie g (für $\eta = 0$) Statt finden. Diese Aenderung influirt indessen, wie sich zeigen wird, auf den Werth von ψ schon in der 4. Ordnung und ist deshalb hier nicht anwendbar.

Dessen ungeachtet ist die Integration der Gleichungen 23) mit Hülfe der Reihen:

$$24) \dots \dots \dots \begin{cases} n = n_1 + \nu \xi + \nu_1 \xi^2 + \nu_2 \xi^3 + \nu_3 \xi^4 + \dots \\ m = m_1 [1 + \mu \xi + \mu_1 \xi^2 + \mu_2 \xi^3 + \mu_3 \xi^4 + \mu_4 \xi^5 + \dots] \end{cases}$$

in derselben Weise auszuführen, wie oben; und es ist auch leicht zu sehen, dass die Form dieser Reihen unverändert beibehalten werden kann. Dahingegen ändern sich die Werthe der Coefficienten $n_1, \nu, \dots; \mu, \mu_1, \dots$, da bei ihrer Herleitung, die durch successive Differentiationen des Werthes lm geschieht, diese Grösse nicht mehr als Function von ξ allein, sondern von ξ und η anzusehn ist. Da aber vermöge der für die Linie f vorgeschriebenen Bedingungen η eine Function von ξ ist, so lassen sich jene Differentiationen dennoch vollständig ausführen, sobald man die Differentialquotienten $\frac{d\eta}{d\xi}, \frac{d^2\eta}{d\xi^2}, \text{etc.}$ kennt. Es ist daher auf die Herleitung dieser Differentialquotienten Bedacht zu nehmen, was zunächst durch Aufstellung der Gleichung 26) geschehn ist.

Um bei den folgenden Entwicklungen unnöthige Mühe zu ersparen durch Hinweglassung derjenigen Glieder, welche den beabsichtigten Grad der Schärfe der Entwicklungen übersteigen, bemerke man, dass in den Reihen 24) die Coefficienten n_1 und μ von der Ordnung 1, alle übrigen aber von der Ordnung Null sind, wie sich aus den in §. 14 gegebenen Werthen dieser Grössen ergibt.

Auf dieselbe Weise, wie dort, ergeben sich nun nach einander folgende Gleichungen, deren jeder die Ordnungszahl, bis zu welcher incl. die Entwicklung ihrer Glieder und Theile geführt ist, beigefügt ist:

$$\frac{n}{m} = \frac{1}{m_1} \left[n_1 + (v - n_1 \mu) \xi + (v_1 - v \mu - n_1 \mu_1) \xi^2 + (v_2 - v_1 \mu - v \mu_1 - n_1 \mu_2) \xi^3 \right. \\ \left. + (v_3 - v_1 \mu_1 - v \mu_2) \xi^4 + \dots \right] \dots 4. O.$$

$$\psi = \left[1 + \mu \xi + \mu_1 \xi^2 + \mu_2 \xi^3 + \dots \right] \psi_1 - \left[1 + \mu \xi + \mu_1 \xi^2 + \mu_2 \xi^3 + \dots \right] \left[n_1 \xi + \frac{1}{2} (v - n_1 \mu) \xi^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{3} (v_1 - v \mu - n_1 \mu_1) \xi^3 + \frac{1}{4} (v_2 - v_1 \mu - v \mu_1 - n_1 \mu_2) \xi^4 \right. \\ \left. + \frac{1}{5} (v_3 - v_1 \mu_1 - v \mu_2) \xi^5 + \dots \right] \dots 5. O.$$

$$\psi = \left[1 + \mu \xi + \mu_1 \xi^2 + \mu_2 \xi^3 + \dots \right] \psi_1 - n_1 \xi - \left(\frac{1}{2} v + \frac{1}{2} n_1 \mu \right) \xi^2 - \left(\frac{1}{3} v_1 + \frac{1}{6} v \mu + \frac{2}{3} n_1 \mu_1 \right) \xi^3 \\ - \left(\frac{1}{4} v_2 + \frac{1}{12} v_1 \mu + \frac{1}{4} v \mu_1 + \frac{3}{4} n_1 \mu_2 \right) \xi^4 - \left(\frac{1}{5} v_3 + \frac{2}{15} v_1 \mu_1 + \frac{3}{10} v \mu_2 \right) \xi^5 + \dots 5. O.$$

$$\eta = \left[\xi + \frac{1}{2} \mu \xi^2 + \frac{1}{3} \mu_1 \xi^3 + \frac{1}{4} \mu_2 \xi^4 + \dots \right] \psi_1 - \frac{1}{2} n_1 \xi^2 - \left(\frac{1}{6} v + \frac{1}{6} n_1 \mu \right) \xi^3 - \left(\frac{1}{12} v_1 + \frac{1}{24} v \mu + \frac{1}{6} n_1 \mu_1 \right) \xi^4 \\ - \left(\frac{1}{20} v_2 + \frac{1}{60} v_1 \mu + \frac{1}{20} v \mu_1 + \frac{3}{20} n_1 \mu_2 \right) \xi^5 - \left(\frac{1}{30} v_3 + \frac{1}{45} v_1 \mu_1 + \frac{1}{20} v \mu_2 \right) \xi^6 - \dots 6. O.$$

$$25) \quad \psi_1 = \frac{1}{2} n_1 r + \left(\frac{1}{6} v - \frac{1}{12} n_1 \mu \right) r^2 + \left(\frac{1}{12} v_1 - \frac{1}{24} v \mu \right) r^3 + \left(\frac{1}{20} v_2 - \frac{1}{40} v_1 \mu - \frac{1}{180} v \mu_1 + \frac{1}{40} n_1 \mu_2 \right) r^4 \\ + \left(\frac{1}{30} v_3 - \frac{1}{180} v_1 \mu_1 + \frac{1}{120} v \mu_2 \right) r^5 + \dots 5. O.$$

Setzt man diesen letztern Werth in den Ausdruck für ψ , so erhält man folgenden nach Potenzen von ξ geordneten Werth von ψ oder $\frac{d\eta}{d\xi}$:

$$26) \quad \dots \frac{d\eta}{d\xi} = \psi = \psi_1 + \xi \left[-n_1 + \frac{1}{2} n_1 \mu r + \frac{1}{6} v \mu r^2 + \frac{1}{12} v_1 \mu r^3 \right] \\ + \xi^2 \left[-\frac{1}{2} v - \frac{1}{2} n_1 \mu + \frac{1}{2} n_1 \mu_1 r + \frac{1}{6} v \mu_1 r^2 + \frac{1}{12} v_1 \mu_1 r^3 \right] \\ + \xi^3 \left[-\frac{1}{3} v_1 - \frac{1}{6} v \mu - \frac{2}{3} n_1 \mu_1 + \frac{1}{2} n_1 \mu_2 r + \frac{1}{6} v \mu_2 r^2 \right] \\ + \xi^4 \left[-\frac{1}{4} v_2 - \frac{1}{12} v_1 \mu - \frac{1}{4} v \mu_1 - \frac{3}{4} n_1 \mu_2 \right] \\ + \xi^5 \left[-\frac{1}{5} v_3 - \frac{2}{15} v_1 \mu_1 - \frac{3}{10} v \mu_2 \right] \dots 5. O. \quad *)$$

Setzt man hierin wieder $\xi = r$ und für ψ_1 den Werth aus 25), so kommt:

$$27) \quad \dots \psi_2 = -\frac{1}{2} n_1 r - \left(\frac{1}{3} v + \frac{1}{12} n_1 \mu \right) r^2 - \left(\frac{1}{4} v_1 + \frac{1}{24} v \mu + \frac{1}{6} n_1 \mu_1 \right) r^3 - \left(\frac{1}{5} v_2 + \frac{1}{40} v_1 \mu \right. \\ \left. + \frac{1}{45} v \mu_1 + \frac{9}{40} n_1 \mu_2 \right) r^4 - \left(\frac{1}{6} v_3 + \frac{1}{18} v_1 \mu_1 + \frac{1}{8} v \mu_2 \right) r^5 - \dots 5. O.$$

*) Durch Integration dieser Gleichung, oder aus der Gleichung für η , wenn man darin für ψ_1 seinen Werth aus 25) setzt, erhält man die Gleichung der Linie f , d. i. die Gleichung der Projection der geodätischen Linie AB , ausgedrückt durch die rechtwinkligen Coordinaten ξ und η . Mittels der bekannten Transformation rechtwinkliger Coordinaten bezieht man diese Gleichung auf die Achsen der x und y .

Die vorstehend abgeleiteten Gleichungen sind für alle conformen Uebertragungen der Ellipsoidfläche auf die Ebene bis zu der angegebenen Ordnung streng und allgemein gültig, wenn lm eine Grösse 2. Ordnung ist, wie in dem vorliegenden Falle.

Da die Entwicklung der Endformeln um zwei Glieder weiter geführt werden soll, als in §. 14, so sind die Coefficienten $n_1, \nu, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ der obern Reihe 24) resp. bis zur Ordnung 4, 3, 2, 1, 0 incl., und die Coefficienten $\mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ der untern Reihe resp. bis zur Ordnung 4, 3, 2, 1, 0 incl. zu entwickeln, indem hinsichtlich dieser letztern Coefficienten hier gleich auf deren Anwendung in der Abtheilung B dieses Zusatzes Bedacht genommen werden soll.

Es ist:

$$28) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{ll} n_1 = \frac{d.lm}{d\eta} & \mu = \frac{d.lm}{d\xi} \\ \nu = \frac{dn}{d\xi} & \mu_1 = \frac{1}{2} \frac{d^2.lm}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \mu^2 \\ \nu_1 = \frac{1}{2} \frac{d^2n}{d\xi^2} & \mu_2 = \frac{1}{6} \frac{d^3.lm}{d\xi^3} + \mu\mu_1 \\ \nu_2 = \frac{1}{6} \frac{d^3n}{d\xi^3} & \mu_3 = \frac{1}{24} \frac{d^4.lm}{d\xi^4} + \frac{1}{2} \mu_1^2 + \mu\mu_2 \\ \nu_3 = \frac{1}{24} \frac{d^4n}{d\xi^4} & \mu_4 = \frac{1}{120} \frac{d^5.lm}{d\xi^5} + \mu_1\mu_2 \end{array} \right.$$

für die bestimmten im Punkte a (für $\xi=0$) Statt findenden Werthe der Differentialquotienten. Die rechts stehenden Werthe ergeben sich mittelst desselben Verfahrens, welches in §. 14 auf S. 43 näher angegeben ist. Es sind jedoch in jedem Coefficienten diejenigen Glieder gleich weggelassen, welche die festgesetzte Ausdehnung der Entwicklung überschreiten.

Bei der Ausführung der Differentiationen ist wohl zu beachten, dass unter $\frac{d.lm}{d\eta}$ der partielle Differentialquotient zu verstehen, und dass ξ als einzige unabhängige Veränderliche anzusehen ist, indem vermöge der für die Linie f vorgeschriebenen Bedingungen die Grössen η, x, y Functionen von ξ werden.

Während behuf der früheren Entwicklungen der Werth von lm dem ersten Gliede der Reihe 18) (S. 39), welches von der 2. Ordnung ist, gleich gesetzt werden konnte, ist es hier erforderlich, auch das folgende Glied, welches von der 4. Ordnung ist, zu berücksichtigen. Da die Reihe nur Glieder gerader Ordnungen hat, so enthalten die beiden ersten Glieder den Werth von lm bis zur 5. Ordnung incl. genau.

Wie in §. 14 soll nun einstweilen die grosse Halbachse $a=1$ gesetzt, und folgende Abkürzungen gebraucht werden:

$$29) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{ll} lm = Hy^2 - H'y^4 & \frac{dH'}{dx} = K' \\ \frac{dH}{dx} = K & \\ \frac{dK}{dx} = L & \\ \frac{dL}{dx} = -N & \end{array} \right.$$

wo unter den Differentialquotienten die partiellen verstanden werden sollen. Hier sind also H, H' die Coefficienten der Reihe 18). Mit Anwendung der schon früher gebrauchten Abkürzung

$$V = \frac{1 + \delta \cos \chi^2}{1 + \delta}$$

gehen die angezeigten successiven Differentiationen leicht von Statten, wenn man die Gleichungen berücksichtigt:

$$\frac{d\chi}{dx} = -(1 + \delta) V^{\frac{3}{2}},$$

mithin:

$$\frac{dV}{dx} = 2\delta \sin \chi \cos \chi V^{\frac{3}{2}} \text{ und } \frac{d \cdot \sin \chi \cos \chi}{dx} = (1 - 2 \cos \chi^2)(1 + \delta \cos \chi^2) V^{\frac{1}{2}}.$$

Man erhält:

$$H = \frac{1}{2} (1 + \delta) V^2$$

$$K = 2\delta (1 + \delta) \sin \chi \cos \chi V^{\frac{5}{2}}$$

$$L = 2\delta (1 + \delta) V^3 \left[1 - (2 - 6\delta) \cos \chi^2 - 7\delta \cos \chi^4 \right]$$

$$N = 4\delta (1 + \delta) V^{\frac{7}{2}} \sin \chi \cos \chi \left[(2 - 9\delta) + (22\delta - 24\delta^2) \cos \chi^2 + 35\delta^2 \cos \chi^4 \right]$$

$$H' = \frac{1}{12} (1 + \delta) V^3 \left[1 - (\delta - 12\delta^2) \cos \chi^2 - 14\delta^2 \cos \chi^4 \right]$$

$$K' = \frac{1}{3} \delta (1 + \delta) V^{\frac{7}{2}} \sin \chi \cos \chi \left[(1 + 6\delta) - (16\delta - 24\delta^2) \cos \chi^2 - 35\delta^2 \cos \chi^4 \right].$$

Man bemerke, dass diese Werthe sämmtlich von der Ordnung Null sind.

Mit Anwendung der Abkürzungen:

$$s = \sin \theta, \quad c = \cos \theta,$$

hat man ferner die partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{dx}{d\xi} = c, \quad \frac{dx}{d\eta} = -s.$$

$$\frac{dy}{d\xi} = s, \quad \frac{dy}{d\eta} = c.$$

Da θ constant ist, so werden die höhern Differentialquotienten gleich Null.

Die gleichfalls zur Anwendung kommenden Differentialquotienten $\frac{d\eta}{d\xi}, \frac{d^2\eta}{d\xi^2}, \frac{d^3\eta}{d\xi^3}, \frac{d^4\eta}{d\xi^4}$ ergeben sich aus der Gleichung 26). Wie sich zeigen wird, ist ihre Entwicklung resp. bis zur Ordnung 3, 2, 1, 0 incl. erforderlich. Um Alles zu den nachfolgenden Differentiationen vorzubereiten, mag ihre Herleitung hier im Voraus gegeben werden.

Die genannte Gleichung giebt unmittelbar den unbestimmten Werth von $\frac{d\eta}{d\xi}$, woraus jene der höhern Differentialquotienten durch successive Differentiationen folgen. Man erhält:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \psi_1 - n_1 \xi - \frac{1}{2} \nu \xi^2 - \frac{1}{3} \nu_1 \xi^3$$

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = -n_1 - \nu \xi - \nu_1 \xi^2$$

$$\frac{d^3 \eta}{d\xi^3} = -\nu - 2\nu_1 \xi$$

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = -2\nu_1.$$

Die bestimmten, im Punkte a (für $\xi=0$) Statt findenden Werthe dieser Differentialquotienten sind demnach:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \psi_1 = \frac{1}{2} n_1 r + \frac{1}{6} \nu r^2 + \frac{1}{12} \nu_1 r^3$$

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = -n_1$$

$$\frac{d^3 \eta}{d\xi^3} = -\nu$$

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = -2\nu_1.$$

Die Werthe der Coefficienten n_1 , ν , ν_1 sind bis zu der hier in Betracht kommenden Ordnung in §. 14 unter i) und k) gegeben, nämlich (mit Anwendung der neu eingeführten Bezeichnungen):

$$\begin{aligned} n_1 &= 2 H_1 c y_1 - K_1 s y_1^2 \\ \nu &= 2 H_1 s c + K_1 (2 c^2 - 2 s^2) y_1 \\ \nu_1 &= K_1 (2 s c^2 - s^3) \end{aligned}$$

wo H_1 und K_1 die bestimmten im Punkte a Statt findenden Werthe von H und K bedeuten. Die Substitution ergibt folgende bestimmte Werthe:

$$30) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\eta}{d\xi} &= H_1 (c r y_1 + \frac{1}{3} s c r^2) + K_1 \left[-\frac{1}{2} s r y_1^2 + (\frac{1}{3} c^2 - \frac{1}{3} s^2) r^2 y_1 + (\frac{1}{6} s c^2 - \frac{1}{12} s^3) r^3 \right] \\ \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} &= -2 H_1 c y_1 + K_1 s y_1^2 \\ \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} &= -2 H_1 s c + K_1 (2 s^2 - 2 c^2) y_1 \\ \frac{d^4 \eta}{d\xi^4} &= K_1 (2 s^3 - 4 s c^2) \end{aligned} \right.$$

Nach diesen vorbereitenden Entwicklungen und Bemerkungen werden die folgenden Differentiationen leicht von Statten gehen. Um die unnöthigen Glieder gleich hinweg lassen zu können, bemerke man noch, dass die Differentialquotienten $\frac{d\eta}{d\xi}$, $\frac{d^2 \eta}{d\xi^2}$, $\frac{d^3 \eta}{d\xi^3}$, $\frac{d^4 \eta}{d\xi^4}$ resp. von der Ordnung 3, 2, 1, 0 sind, und beachte ferner die auf S. 61 für jeden Differentialquotienten angegebenen Grenzen der Entwicklung.

Es mögen hier zunächst die unbestimmten Werthe der Differentialquotienten n , $\frac{dn}{d\xi}$, etc. und $\frac{d.lm}{d\xi}$, $\frac{d^2.lm}{d\xi^2}$, etc. folgen:

$$n = \frac{d.lm}{d\eta} = \frac{d.lm}{dx} \frac{dx}{d\eta} + \frac{d.lm}{dy} \frac{dy}{d\eta} = -\frac{d.lm}{dx} s + \frac{d.lm}{dy} c$$

oder:

$$n = 2Hcy - Ksy^2 - 4H'cy^3 + K'sy^4$$

$$\frac{dn}{d\xi} = 2Hsc + K(2c^2 - 2s^2)y - Lscy^2 - 12H'scy^2 + K'(4s^2 - 4c^2)y^3 + \left[2Hc^2 - 4Kscy\right] \frac{d\eta}{d\xi}^*)$$

$$\frac{d^2n}{d\xi^2} = K(4sc^2 - 2s^3) + L(2c^3 - 4s^2c)y - 24H's^2cy + Nsc^2y^2 + K'(12s^3 - 24sc^2)y^2 \\ + K(4c^3 - 8s^2c) \frac{d\eta}{d\xi} + \left[2Hc^2 - 4Kscy\right] \frac{d^2\eta}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3n}{d\xi^3} = L(6sc^3 - 6s^3c) - 24H's^3c + N(6s^2c^2 - 2c^4)y + K'(24s^4 - 72s^2c^2)y \\ + K(6c^3 - 12s^2c) \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + (2Hc^2 - 4Kscy) \frac{d^3\eta}{d\xi^3}$$

$$\frac{d^4n}{d\xi^4} = N(12s^3c^2 - 8sc^4) + K'(24s^5 - 96s^3c^2) + K(8c^3 - 16s^2c) \frac{d^3\eta}{d\xi^3} + 2Hc^2 \cdot \frac{d^4\eta}{d\xi^4}$$

und ferner:

$$\frac{d.lm}{d\xi} = \frac{d.lm}{dx} c + \frac{d.lm}{dy} s + \left[-\frac{d.lm}{dx} s + \frac{d.lm}{dy} c\right] \frac{d\eta}{d\xi} \\ = 2Hsy + Kcy^2 - 4H'sy^3 - K'cy^4 + \left[2Hcy - Ksy^2\right] \frac{d\eta}{d\xi}$$

$$\frac{d^2.lm}{d\xi^2} = 2Hs^2 + 4Kscy + Lc^2y^2 - 12H's^2y^2 - 8K'scy^3 \\ + \left[4Hsc + K(4c^2 - 4s^2)y\right] \frac{d\eta}{d\xi} + (2Hcy - Ksy^2) \frac{d^2\eta}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3.lm}{d\xi^3} = 6Ks^2c + 6Lsc^2y - 24H's^3y - Nc^3y^2 - 36K's^2cy^2 + K(12sc^2 - 6s^3) \frac{d\eta}{d\xi} \\ + \left[6Hsc + K(6c^2 - 6s^2)y\right] \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + (2Hcy - Ksy^2) \frac{d^3\eta}{d\xi^3}$$

$$\frac{d^4.lm}{d\xi^4} = 12Ls^2c^2 - 24H's^4 - 8Nsc^3y - 96K's^3cy + K(24sc^2 - 12s^3) \frac{d^2\eta}{d\xi^2} \\ + \left[8Hsc + K(8c^2 - 8s^2)y\right] \frac{d^3\eta}{d\xi^3} + 2Hcy \cdot \frac{d^4\eta}{d\xi^4}$$

$$\frac{d^5.lm}{d\xi^5} = -20Ns^2c^3 - 120K's^4c + K(40sc^2 - 20s^3) \frac{d^3\eta}{d\xi^3} + 10Hsc \cdot \frac{d^4\eta}{d\xi^4}$$

*) Die abermalige Differentiation dieses mit dem Factor $\frac{d\eta}{d\xi}$ verbundenen Gliedes nach η würde in dem Differentialquotienten $\frac{d^2n}{d\xi^2}$ ein Glied liefern, welches den Factor $\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2$ enthält. Da aber $\frac{d^2n}{d\xi^2}$ nur bis zur 2. Ordnung incl. gebraucht wird und $\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2$ eine Grösse 4. Ordnung ist, so fällt dieses Glied in $\frac{d^2n}{d\xi^2}$ hinweg. Eine analoge Begründung hat die Vernachlässigung verschiedener die Factoren $\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2$, $\frac{d\eta}{d\xi}$, $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$, $\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \cdot \frac{d\eta}{d\xi}$, etc. enthaltenden Glieder in den folgenden Differentialquotienten.

Setzt man hierin statt der unbestimmten Werthe y, H, K , etc. die bestimmten, im Punkte a Statt findenden y_1, H_1, K_1 etc., und statt der Differentialquotienten $\frac{d\eta}{d\xi}, \frac{d^2\eta}{d\xi^2}$, etc. deren bestimmte unter 30) gegebenen Werthe, so erhält man nach Vorschrift der Gleichungen 28) die nachfolgenden Ausdrücke für die Coefficienten $n_1, \nu, \dots; \mu, \mu_1, \dots$, die Glieder eines jeden nach aufsteigenden Ordnungen rangirt:

$$n_1 = 2H_1cy_1 - K_1sy_1^2 - 4H_1'cy_1^3 + K_1'sy_1^4$$

$$\begin{aligned} \nu = & 2H_1sc + K_1(2c^2 - 2s^2)y_1 + \left\{ -12H_1'scy_1^2 + H_1^2(2c^3ry_1 + \frac{2}{3}sc^3r^2) - L_1scy_1^2 \right\} \\ & + \left\{ K_1'(4s^2 - 4c^2)y_1^3 + H_1K_1 \left[-5sc^2ry_1^2 + (\frac{2}{3}c^4 - 2s^2c^2)r^2y_1 + (\frac{1}{3}sc^4 - \frac{1}{6}s^3c^2)r^3 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_1 = & K_1(2sc^2 - s^3) + \left\{ -12H_1's^2cy_1 - 2H_1^2c^3y_1 + L_1(c^3 - 2s^2c)y_1 \right\} + \left\{ K_1'(6s^3 - 12sc^2)y_1^2 \right. \\ & \left. + H_1K_1 \left[5sc^2y_1^2 + (2c^4 - 4s^2c^2)ry_1 + (\frac{2}{3}sc^4 - \frac{4}{3}s^3c^2)r^2 \right] + \frac{1}{2}N_1sc^2y_1^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_2 = & \left\{ -4H_1's^3c - \frac{2}{3}H_1^2sc^3 + L_1(sc^3 - s^3c) \right\} + \left\{ K_1'(4s^4 - 12s^2c^2)y_1 \right. \\ & \left. + H_1K_1(6s^2c^2 - \frac{8}{3}c^4)y_1 + N_1(s^2c^2 - \frac{1}{3}c^4)y_1 \right\} \end{aligned}$$

$$\nu_3 = K_1'(s^5 - 4s^3c^2) + H_1K_1(\frac{3}{2}s^3c^2 - sc^4) + N_1(\frac{1}{2}s^3c^2 - \frac{1}{3}sc^4);$$

und ferner:

$$\begin{aligned} \mu = & 2H_1sy_1 + K_1cy_1^2 + \left\{ -4H_1'sy_1^3 + H_1^2(2c^2ry_1^2 + \frac{2}{3}sc^2r^2y_1) \right\} \\ & + \left\{ -K_1'cy_1^4 + H_1K_1 \left[-2scry_1^3 + (\frac{2}{3}c^3 - s^2c)r^2y_1^2 + (\frac{1}{3}sc^3 - \frac{1}{6}s^3c)r^3y_1 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_1 = & H_1s^2 + 2K_1scy_1 + \left\{ -6H_1's^2y_1^2 + H_1^2 \left[(2s^2 - 2c^2)y_1^2 + 2sc^2ry_1 + \frac{2}{3}s^2c^2r^2 \right] + \frac{1}{2}L_1c^2y_1^2 \right\} \\ & + \left\{ -4K_1'scy_1^3 + H_1K_1 \left[4scy_1^3 + (2c^3 - 3s^2c)ry_1^2 + (\frac{4}{3}sc^3 - \frac{4}{3}s^3c)r^2y_1 + (\frac{1}{3}s^2c^3 - \frac{1}{6}s^4c)r^3 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_2 = & K_1s^2c + \left\{ -4H_1's^3y_1 + H_1^2(2s^3 - \frac{8}{3}sc^2)y_1 + L_1sc^2y_1 \right\} \\ & + \left\{ -6K_1's^2cy_1^2 + H_1K_1 \left[(9s^2c - \frac{8}{3}c^3)y_1^2 + (2sc^3 - s^3c)ry_1 + (\frac{2}{3}s^2c^3 - \frac{1}{3}s^4c)r^2 \right] - \frac{1}{6}N_1c^3y_1^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\mu_3 = \left\{ -H_1's^4 + H_1^2(\frac{1}{2}s^4 - \frac{2}{3}s^2c^2) + \frac{1}{2}L_1s^2c^2 \right\} + \left\{ -4K_1's^3cy_1 + H_1K_1(\frac{13}{2}s^3c - \frac{11}{3}sc^3)y_1 - \frac{1}{3}N_1sc^3y_1 \right\}$$

$$\mu_4 = -K_1's^4c + H_1K_1(\frac{3}{2}s^4c - s^2c^3) - \frac{1}{6}N_1s^2c^3.$$

Die Substitution dieser Werthe in den Gleichungen 25) und 27) giebt folgende Werthe der Azimuthunterschiede ψ_1 und ψ_2 :

$$\begin{aligned}
31) \left\{ \begin{aligned}
& \psi_1 = H_1 \left[y_1 + \frac{1}{3} s r \right] c r - K_1 \left[\frac{1}{2} s r y_1^2 + \frac{1}{3} s^2 r^2 y_1 + \frac{1}{12} s^3 r^3 - \frac{1}{3} c^2 r^2 y_1 - \frac{1}{6} s c^2 r^3 \right] \\
& \quad - H_1' \left[2 y_1^3 + 2 s r y_1^2 + s^2 r^2 y_1 + \frac{1}{5} s^3 r^3 \right] c r \\
& \quad - H_1^2 \left[\frac{1}{3} s r y_1^2 + \frac{1}{6} s^2 r^2 y_1 + \frac{1}{90} s^3 r^3 - \frac{1}{6} c^2 r^2 y_1 - \frac{7}{90} s c^2 r^3 \right] c r \\
& \quad - L_1 \left[\frac{1}{6} s r y_1^2 + \frac{1}{6} s^2 r^2 y_1 + \frac{1}{20} s^3 r^3 - \frac{1}{12} c^2 r^2 y_1 - \frac{1}{20} s c^2 r^3 \right] c r \\
& \quad + K_1' \left[\frac{1}{2} s r y_1^4 + \frac{2}{3} s^2 r^2 y_1^3 + \frac{1}{2} s^3 r^3 y_1^2 + \frac{1}{5} s^4 r^4 y_1 + \frac{1}{30} s^5 r^5 - \frac{2}{3} c^2 r^2 y_1^3 - s c^2 r^3 y_1^2 - \frac{3}{5} s^2 c^2 r^4 y_1 - \frac{2}{15} s^3 c^2 r^5 \right] \\
& \quad + H_1 K_1' \left[\frac{1}{6} s^2 r^2 y_1^3 + \frac{1}{6} s^3 r^3 y_1^2 + \frac{11}{180} s^4 r^4 y_1 + \frac{1}{180} s^5 r^5 - \frac{1}{6} c^2 r^2 y_1^3 - \frac{2}{3} s c^2 r^3 y_1^2 + \frac{13}{90} c^4 r^4 y_1 - \frac{9}{20} s^2 c^2 r^4 y_1 + \frac{7}{90} s c^4 r^5 - \frac{1}{12} s^3 c^2 r^5 \right] \\
& \quad + N_1 \left[\frac{1}{24} s r y_1^2 + \frac{1}{20} s^2 r^2 y_1 + \frac{1}{60} s^3 r^3 - \frac{1}{60} c^2 r^2 y_1 - \frac{1}{90} s c^2 r^3 \right] c^2 r^2 \\
& \psi_2 = -H_1 \left[y_1 + \frac{2}{3} s r \right] c r + K_1 \left[\frac{1}{2} s r y_1^2 + \frac{2}{3} s^2 r^2 y_1 + \frac{1}{4} s^3 r^3 - \frac{2}{3} c^2 r^2 y_1 - \frac{1}{2} s c^2 r^3 \right] \\
& \quad + H_1' \left[2 y_1^3 + 4 s r y_1^2 + 3 s^2 r^2 y_1 + \frac{4}{5} s^3 r^3 \right] c r \\
& \quad - H_1^2 \left[\frac{1}{3} s r y_1^2 + \frac{1}{2} s^2 r^2 y_1 + \frac{8}{45} s^3 r^3 + \frac{1}{6} c^2 r^2 y_1 + \frac{4}{45} s c^2 r^3 \right] c r \\
& \quad + L_1 \left[\frac{1}{3} s r y_1^2 + \frac{1}{2} s^2 r^2 y_1 + \frac{1}{5} s^3 r^3 - \frac{1}{4} c^2 r^2 y_1 - \frac{1}{5} s c^2 r^3 \right] c r \\
& \quad - K_1' \left[\frac{1}{2} s r y_1^4 + \frac{4}{3} s^2 r^2 y_1^3 + \frac{3}{2} s^3 r^3 y_1^2 + \frac{4}{5} s^4 r^4 y_1 + \frac{1}{6} s^5 r^5 - \frac{4}{3} c^2 r^2 y_1^3 - 3 s c^2 r^3 y_1^2 - \frac{12}{5} s^2 c^2 r^4 y_1 - \frac{2}{3} s^3 c^2 r^5 \right] \\
& \quad + H_1 K_1' \left[\frac{1}{6} s^2 r^2 y_1^3 + \frac{1}{3} s^3 r^3 y_1^2 + \frac{41}{180} s^4 r^4 y_1 + \frac{1}{18} s^5 r^5 - \frac{1}{6} c^2 r^2 y_1^3 - \frac{1}{2} s c^2 r^3 y_1^2 - \frac{17}{90} c^4 r^4 y_1 - \frac{37}{60} s^2 c^2 r^4 y_1 - \frac{1}{9} s c^4 r^5 - \frac{2}{9} s^3 c^2 r^5 \right] \\
& \quad - N_1 \left[\frac{1}{8} s r y_1^2 + \frac{1}{5} s^2 r^2 y_1 + \frac{1}{12} s^3 r^3 - \frac{1}{15} c^2 r^2 y_1 - \frac{1}{18} s c^2 r^3 \right] c^2 r^2.
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Die Coefficienten H_1 , K_1 , etc. sind Functionen des Winkels α_1 , der wiederum allein von der Abscisse x_1 des Punktes a abhängt. *) Jene Coefficienten können daher auch als Functionen der Abscisse x_1 angesehen werden.

Die beiden Formeln für ψ_1 und ψ_2 kann man nun, ebenso wie in §. 14 die Formeln m), transformiren. Man wählt auch hier am besten:

$$\text{in der Formel für } \psi_1 \text{ die Abscisse } x_1 + \frac{1}{3}(x_2 - x_1) = x_1 + \frac{1}{3} c r$$

$$\text{„ „ „ „ } \psi_2 \text{ „ „ } x_2 - \frac{1}{3}(x_2 - x_1) = x_1 + \frac{2}{3} c r$$

als Argument für die neu einzuführenden Coefficienten. Diese mögen in beiden Formeln mit H , K , etc. **) bezeichnet werden. Dann ist nach dem Taylor'schen Satze mit Berücksichtigung der Gleichungen 29) zu substituiren

*) Man erinnere sich, dass χ die Breite eines Punktes bedeutet, der vom Parallel des Anfangspunktes den Abstand x hat (siehe §. 8, S. 23).

**) Es wird nicht zu befürchten sein, dass die diesen Zeichen hier beigelegte doppelte Bedeutung, oder die frühere Verwendung derselben zur Bezeichnung der unbestimmten Werthe derselben Functionen zu Irrthümern Anlass geben könnte.

in der Formel für ψ_1 :

$$\begin{array}{ll} H_1 = H - \frac{1}{3} K c r + \frac{1}{18} L c^2 r^2 + \frac{1}{162} N c^3 r^3 & H_1' = H' - \frac{1}{3} K' c r \\ K_1 = K - \frac{1}{3} L c r - \frac{1}{18} N c^2 r^2 & K_1' = K' \\ L_1 = L + \frac{1}{3} N c r & H_1^2 = H^2 - \frac{2}{3} H K c r \\ N_1 = N & H_1 K_1 = H K, \end{array}$$

und in der Formel für ψ_2 :

$$\begin{array}{ll} H_1 = H - \frac{2}{3} K c r + \frac{2}{9} L c^2 r^2 + \frac{4}{81} N c^3 r^3 & H_1' = H' - \frac{2}{3} K' c r \\ K_1 = K - \frac{2}{3} L c r - \frac{2}{9} N c^2 r^2 & K_1' = K' \\ L_1 = L + \frac{2}{3} N c r & H_1^2 = H^2 - \frac{4}{3} H K c r \\ N_1 = N & H_1 K_1 = H K. \end{array}$$

Durch diese Substitutionen gehn die Formeln über in:

$$\begin{aligned} \psi_1 = & H \left[y_1 + \frac{1}{3} s r \right] c r - K \left[\frac{1}{2} y_1^2 + \frac{1}{3} s r y_1 + \frac{1}{12} s^2 r^2 - \frac{1}{18} c^2 r^2 \right] s r \\ & - H' \left[2 y_1^3 + 2 s r y_1^2 + s^2 r^2 y_1 + \frac{1}{5} s^3 r^3 \right] c r \\ & - H^2 \left[\frac{1}{3} s r y_1^2 + \frac{1}{6} s^2 r^2 y_1 + \frac{1}{90} s^3 r^3 - \frac{1}{6} c^2 r^2 y_1 - \frac{7}{90} s c^2 r^3 \right] c r \\ & - L \left[\frac{1}{18} s^2 r^2 y_1 + \frac{1}{45} s^3 r^3 - \frac{1}{36} c^2 r^2 y_1 - \frac{7}{540} s c^2 r^3 \right] c r \\ & + K' \left[\frac{1}{2} y_1^4 + \frac{2}{3} s r y_1^3 + \frac{1}{2} s^2 r^2 y_1^2 + \frac{1}{5} s^3 r^3 y_1 + \frac{1}{30} s^4 r^4 - \frac{1}{3} c^2 r^2 y_1^2 - \frac{4}{15} s c^2 r^3 y_1 - \frac{1}{15} s^2 c^2 r^4 \right] s r \\ & + H K \left[\frac{1}{6} s^2 r^2 y_1^3 + \frac{1}{6} s^3 r^3 y_1^2 + \frac{11}{180} s^4 r^4 y_1 + \frac{1}{180} s^5 r^5 - \frac{1}{6} c^2 r^2 y_1^3 - \frac{4}{9} s c^2 r^3 y_1^2 + \frac{1}{30} c^4 r^4 y_1 - \frac{61}{180} s^2 c^2 r^4 y_1 + \frac{7}{270} s c^4 r^5 - \frac{41}{540} s^3 c^2 r^5 \right] \\ & + N \left[\frac{1}{72} s r y_1^2 + \frac{7}{540} s^2 r^2 y_1 + \frac{1}{216} s^3 r^3 - \frac{1}{810} c^2 r^2 y_1 - \frac{4}{2430} s c^2 r^3 \right] c^2 r^2 \\ 32) \left\{ \begin{aligned} \psi_2 = & - H \left[y_1 + \frac{2}{3} s r \right] c r + K \left[\frac{1}{2} y_1^2 + \frac{2}{3} s r y_1 + \frac{1}{4} s^2 r^2 - \frac{1}{18} c^2 r^2 \right] s r \\ & + H' \left[2 y_1^3 + 4 s r y_1^2 + 3 s^2 r^2 y_1 + \frac{4}{5} s^3 r^3 \right] c r \\ & - H^2 \left[\frac{1}{3} s r y_1^2 + \frac{1}{2} s^2 r^2 y_1 + \frac{8}{45} s^3 r^3 + \frac{1}{6} c^2 r^2 y_1 + \frac{4}{45} s c^2 r^3 \right] c r \\ & + L \left[\frac{1}{18} s^2 r^2 y_1 + \frac{1}{30} s^3 r^3 - \frac{1}{36} c^2 r^2 y_1 - \frac{4}{270} s c^2 r^3 \right] c r \\ & - K' \left[\frac{1}{2} y_1^4 + \frac{4}{3} s r y_1^3 + \frac{3}{2} s^2 r^2 y_1^2 + \frac{4}{5} s^3 r^3 y_1 + \frac{1}{6} s^4 r^4 - \frac{1}{3} c^2 r^2 y_1^2 - \frac{2}{5} s c^2 r^3 y_1 - \frac{2}{15} s^2 c^2 r^4 \right] s r \\ & + H K \left[\frac{1}{6} s^2 r^2 y_1^3 + \frac{1}{3} s^3 r^3 y_1^2 + \frac{41}{180} s^4 r^4 y_1 + \frac{1}{18} s^5 r^5 - \frac{1}{6} c^2 r^2 y_1^3 - \frac{1}{18} s c^2 r^3 y_1^2 + \frac{1}{30} c^4 r^4 y_1 + \frac{1}{20} s^2 c^2 r^4 y_1 + \frac{2}{270} s c^4 r^5 + \frac{4}{270} s^3 c^2 r^5 \right] \\ & - N \left[\frac{1}{72} s r y_1^2 + \frac{4}{270} s^2 r^2 y_1 + \frac{1}{180} s^3 r^3 + \frac{1}{810} c^2 r^2 y_1 - \frac{1}{2430} s c^2 r^3 \right] c^2 r^2. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Man sieht, dass in beiden Formeln das Glied der zweiten Ordnung unverändert geblieben, und im Gliede der 4. Ordnung nur der mit L multiplicirte Theil verändert ist. Dasselbe wird bei allen derartigen Transformationen Statt finden.

Um den Formeln eine symmetrische Gestalt zu geben, ist in der Formel für

ψ_2 zu setzen: $y_2 - sr$ statt y_1 , und die Potenzen von $(y_2 - sr)$ zu entwickeln. Es geht dann durch blosse Vertauschung des Punktes a mit dem Punkte b die eine Formel in die andere über, also z. B. die untere Formel in die obere, indem man in ersterer setzt: y_1 statt y_2 , $-s$ statt s , und $-c$ statt c .

Da somit die eine Formel aus der andern hergeleitet werden kann, oder vielmehr (wie es sein muss) beide Formeln nicht wesentlich verschieden von einander sind, so hätte die Entwicklung von ψ_2 erspart werden können. Es ist dies jedoch der Controle wegen nicht geschehn, welche die gleichzeitige Entwicklung beider Formeln über die richtige Ausführung der vorstehenden Rechnungen verschafft.

Durch die Substitutionen

$$x_2 - x_1 = cr, \quad \text{und} \quad y_2 - y_1 = sr$$

verschwinden die Grössen s, c, r ganz aus den Formeln, die dann nur noch von den Coordinaten der Punkte a und b abhängen, insofern auch die Coefficienten H, K , etc. Functionen dieser Coordinaten (von x_1 und x_2) sind. Es soll die Ausführung dieser Substitutionen mit der jetzt vorzunehmenden Vereinfachung der Formeln verbunden werden. Um diese letztere zu bewerkstelligen, müssen indessen einige Bemerkungen vorausgehen.

Die Coefficienten H, K , etc. haben wegen ihrer geringen Veränderlichkeit sehr wenig Einfluss auf die Ab- oder Zunahme der Theile, deren Factoren sie sind. Die Abscissen x_1, x_2 kommen nur in der Differenzform $(x_2 - x_1)$, die Ordinaten y_1, y_2 hingegen, jede für sich, auch als Factoren einzelner Theile vor. Es geht hieraus, sowie unmittelbar noch aus den Formeln selbst hervor, dass die Absolutwerthe der Azimuthunterschiede ψ_1 und ψ_2 , und der einzelnen Theile, aus denen die Formeln bestehen, hauptsächlich von der Länge $r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ der Geraden ab und von den Abständen y_1 und y_2 ihrer Endpunkte vom Hauptmeridian abhängen.

Es kann nun von einer wesentlichen Vereinfachung der Formeln nur dann die Rede sein, wenn die Anwendung derselben auf gewisse Grenzen beschränkt bleiben soll. Solche Grenzen, die nach dem eben Gesagten für r , und für y_1 und y_2 festzusetzen sind, finden sich zu Anfang dieses Zusatzes (Seite 57 und 58) bereits angegeben. Sie sind dem ungefähren Umfange des Hannoverschen Dreieckssystems entnommen wie folgt:

Die längste Linie, welche sich zwischen zwei Punkten des Hannoverschen Dreieckssystems ziehen lässt, ist die Linie Borkum-Inselsberg; für diese ist in runder Zahl $r = 400000^m$. Der vom Hauptmeridian entlegenste Punkt (Borkum) hat die Ordinate $y = +217000^m$. Die oben festgesetzte Grenze: 250000^m Abstand vom Hauptmeridian, geht daher bedeutend über den Umfang des Hannoverschen Dreieckssystems hinaus, zumal da dessen grösste Ausdehnung vom Hauptmeridian nach Westen, welche über doppelt so gross ist als jene nach Osten, noch überschritten ist.

Behuf numerischen Rechnens ist jedem Gliede der Formeln der Factor $\rho = \text{arc. rad. in Secunden}$ beizufügen, um den Werth desselben in Secunden zu erhalten; und die Glieder der 2., 3., etc. Ordnung sind resp. mit $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, etc. zu multipliciren,

wenn die Coordinaten nicht, wie bisher vorausgesetzt, in Theilen der grossen Halb-
achse a , sondern in irgend einem Längenmaasse gegeben sind. Bei den numerischen
Rechnungen ist die Tafel III zu benutzen. Da hier aber die Grösse H für die Be-
rechnung des Gliedes zweiter Ordnung hergerichtet und deshalb ihr Tafelwerth so
zu verstehen ist:

$$H = \frac{e(1 + \delta \cos \chi^2)^2}{2a^2(1 + \delta)},$$

so wird bei der Benutzung der Tafel zur Berechnung von Grössen 4. Ordnung in
den Formeln zu setzen sein: $\frac{H}{a^2}$ statt H .

Diese Bemerkungen, an die nicht weiter erinnert werden wird, wolle man bei
den nachfolgenden numerischen Rechnungen wohl beachten.

Da die beiden Formeln für ψ_1 und ψ_2 nicht wesentlich verschieden von ein-
ander sind, und in den Endformeln die eine aus der andern durch ein einfaches
Vertauschen der Bezeichnungen hergeleitet werden kann, so wird nachstehend nur von
der einen Formel für ψ_1 die Rede sein.

Das Glied der zweiten Ordnung ist in der bereits in §. 14 gegebenen Gestalt:

$$H(x_2 - x_1) \left[y_1 + \frac{1}{3}(y_2 - y_1) \right].$$

Der Absolutwerth dieses Gliedes wird am grössten, wenn man setzt: $y_1 = 250000^m$,
 $x_2 - x_1 = 400000^m$, folglich $y_2 - y_1 = 0$ wegen $r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Nimmt
man für $\log H$ den Werth 1.4035, der ungefähr der mittleren Breite des Hannoverschen
Dreieckssystems entspricht, so hat man folgende Rechnung:

$$\begin{array}{rcl} H & . . . & 1.4035 \\ x_2 - x_1 & . . . & 5.6021 \\ y_1 & . . . & 5.3979 \\ \hline & & 2.4035 . . . 253'' \end{array}$$

Um daher die 3. Decimalstelle der Secunde in allen Fällen scharf zu erhalten, wird
 $\log H$ mit 6 Decimalstellen erfordert, während die Tafel III. nur 5 Stellen enthält.
Da indessen die Differenz zwischen zwei auf einander folgenden Werthen von x grösser
als 10000 ist, so können noch 4 Stellen durch Interpolation erhalten werden. Hier,
wo die Interpolation bloss eine, nämlich die 6. Stelle liefern soll, kann die genannte
Differenz constant, gleich 11500, angenommen werden.

Das Glied der 3. Ordnung ist:

$$-K(y_2 - y_1) \left[\frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{3}y_1(y_2 - y_1) + \frac{1}{12}(y_2 - y_1)^2 - \frac{1}{18}(x_2 - x_1)^2 \right],$$

oder:

$$-\frac{1}{6}K(y_2 - y_1) \left[y_1^2 + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)^2 - \frac{1}{3}(x_2 - x_1)^2 \right],$$

wo:

$$K = 2\delta(1+\delta)\sin\chi\cos\chi V^{\frac{5}{2}} = \delta(1+\delta)\left(\frac{1+\delta\cos\chi^2}{1+\delta}\right)^{\frac{5}{2}}\sin 2\chi.$$

Behuf numerischer Berechnung wird man daher das Glied der 3. Ordnung zweckmässig so schreiben:

$$-h(y_2 - y_1)\left[y_1^2 + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)^2 - \frac{1}{3}(x_2 - x_1)^2\right],$$

so dass zu setzen ist:

$$h = \frac{\delta(1+\delta)}{6a^3}\left(\frac{1+\delta\cos\chi^2}{1+\delta}\right)^{\frac{5}{2}}\sin 2\chi.$$

Die Werthe von $\log h$ sind in Tafel III. enthalten. Sie sind für die daneben stehenden Werthe von $\log H$ berechnet.

Der Absolutwerth des Gliedes wird am grössten, wenn man $y_2 - y_1$ und y_1 so gross wie möglich macht, wenn man also setzt:

$$y_1 = 250000^m, y_2 - y_1 = -400000^m; \text{ folglich } y_1 + y_2 = 100000^m; x_2 - x_1 = 0.$$

Ferner werde $\log h = 1.9367$ gesetzt. Dann ist die Rechnung:

$h \dots$	1.9367	7.5388	
$y_2 - y_1 \dots$	5.6021	$\frac{1}{2}(y_1 + y_2)^2 \dots$	9.6990
	7.5388		7.2378
$y_1^2 \dots$	10.7958		$0''.0017$
	8.3346		0.0216
	$\dots 0''.0216$		$0''.023$

Grenzwert des Gliedes 3. Ordnung = $0''.023$.

Vier Decimalstellen sind demnach für den Tafelwerth $\log h$ mehr als ausreichend.

Um dem Gliede der 4. Ordnung, welches aus drei mit verschiedenen Coefficienten multiplicirten Theilen besteht, eine einfachere Gestalt zu geben, werde dieses Glied der Kürze wegen einstweilen so geschrieben:

$$-H'A - H^2B - LC.$$

Die Werthe der Coefficienten H' , H^2 , L (siehe S. 62) kann man auch so schreiben:

$$H' = \frac{1}{6}HV\left[1 - (\delta - 12\delta^2)\cos\chi^2 - 14\delta^2\cos\chi^4\right]$$

$$H^2 = \frac{1}{2}(1+\delta)HV^2$$

$$L = 4\delta HV\left[1 - (2 - 6\delta)\cos\chi^2 - 7\delta\cos\chi^4\right].$$

Setzt man hierin für V seinen auf S. 62 gegebenen Werth, so bringt man die Coefficienten leicht auf folgende Form:

$$H' = \frac{H}{6(1+\delta)} + \frac{2H\delta^2\cos\chi^2}{1+\delta}\left[1 - \left(\frac{5}{4} - \delta\right)\cos\chi^2 - \frac{7}{6}\delta\cos\chi^4\right]$$

$$H^2 = \frac{H}{2(1+\delta)} + \frac{H\delta\cos\chi^2}{1+\delta}(1 + \frac{1}{2}\delta\cos\chi^2)$$

$$L = \frac{4H\delta}{1+\delta}\left[1 - (2 - 7\delta)\cos\chi^2 - (9\delta - 6\delta^2)\cos\chi^4 - 7\delta^2\cos\chi^6\right].$$

Wenn man nun alle mit δ , δ^2 , etc. multiplicirten Theile in diesen Coefficienten vernachlässigen kann, so wird man setzen dürfen:

$$33) \dots\dots\dots \begin{cases} H' = \frac{H}{6(1+\delta)} \\ H^2 = \frac{H}{2(1+\delta)} \\ L = 0. \end{cases}$$

Es ist daher zu untersuchen, welcher Fehler aus der Vernachlässigung von

$$\frac{H\delta \cos \chi^2}{1+\delta} \text{ in } H^2, \text{ und von } \frac{4H\delta}{1+\delta} (1 - 2 \cos \chi^2) \text{ in } L$$

entspringt, da man sich hierbei auf die mit der ersten Potenz von δ multiplicirten Theile beschränken kann. Der fragliche Fehler wird dann sein:

$$- \frac{H\delta \cos \chi^2}{1+\delta} B - \frac{4H\delta(1-2\cos \chi^2)}{1+\delta} C.$$

Die Werthe von B und C gehen durch die Substitutionen $cr = x_2 - x_1$ und $sr = y_2 - y_1$ über in:

$$B = \frac{x_2 - x_1}{90} \left\{ (y_2 - y_1) [30y_1^2 + 15y_1(y_2 - y_1) + (y_2 - y_1)^2] - (x_2 - x_1)^2 [15y_1 + 7(y_2 - y_1)] \right\}$$

$$C = \frac{x_2 - x_1}{540} \left\{ (y_2 - y_1)^2 [30y_1 + 12(y_2 - y_1)] - (x_2 - x_1)^2 [15y_1 + 7(y_2 - y_1)] \right\}.$$

Giebt man diesen Ausdrücken noch eine etwas veränderte zur numerischen Berechnung tauglichere Gestalt, so liefert ihre Substitution folgenden Ausdruck für den Fehler:

$$- \frac{H\delta(x_2 - x_1) \cos \chi^2}{90a^2(1+\delta)} \left\{ (y_2 - y_1)^3 + 15y_1(y_2 - y_1)(y_1 + y_2) - 15(x_2 - x_1)^2 \left[y_1 + \frac{7}{15}(y_2 - y_1) \right] \right\}$$

$$- \frac{H\delta(x_2 - x_1)(1 - 2 \cos \chi^2)}{9a^2(1+\delta)} \left\{ 2(y_2 - y_1)^2 \left[y_1 + \frac{2}{5}(y_2 - y_1) \right] - (x_2 - x_1)^2 \left[y_1 + \frac{7}{15}(y_2 - y_1) \right] \right\}.$$

Der Absolutwerth jedes der beiden Theile, sowie auch des ganzen Ausdrucks, wird am grössten, wenn man $x_2 - x_1$ und y_1 so gross wie möglich macht. Es ist also zu setzen:

$$x_2 - x_1 = 400000^m; \quad y_2 - y_1 = 0; \quad y_1 = 250000^m.$$

Der Fehler wird für diese Werthe ausgedrückt durch:

$$\frac{H\delta \cos \chi^2}{6a^2(1+\delta)} y_1 (x_2 - x_1)^3 + \frac{H\delta(1 - 2 \cos \chi^2)}{9a^2(1+\delta)} y_1 (x_2 - x_1)^3,$$

oder durch

$$\frac{H\delta(1 + \sin \chi^2)}{18a^2(1+\delta)} y_1 (x_2 - x_1)^3.$$

Nimmt man $\chi = 55^\circ$, woraus $\log H = 1.4032$ folgt, so ist die Rechnung:

H	. . .	1.4032
δ	. . .	7.8221
$1 + \sin x^2$	. . .	0.2230
$1:18$	. . .	8.7447
$1:a^2$	. . .	6.3908
$1:(1+\delta)$	. . .	9.9971
		4.5809
y_1	. . .	5.3979
$(x_2 - x_1)^3$	. .	16.8062
		6.7850 . . . 0''.00061.

Also Grenzwert des Fehlers = 0''.00061.

Der fragliche Fehler kann daher um so mehr unberücksichtigt bleiben, als in der Anwendung nicht leicht die extremen Werthe zugleich (wie in vorstehender Rechnung vorausgesetzt ist) eintreten werden. Man wird vielmehr für einzelne Fälle die festgesetzten Grenzen noch erheblich erweitern können.

Es ist demnach erlaubt, die unter 33) gegebenen einfachern Werthe anstatt der Coefficienten H' , H^2 , L zu setzen, in Folge dessen das Glied der 4. Ordnung wird:

$$-\frac{H}{6(1+\delta)}(A + 3B),$$

und wenn man die Addition $A + 3B$ ausführt:

$$-\frac{Hcr}{6(1+\delta)}\left[2y_1^3 + 3sry_1^2 + \frac{3}{2}s^2r^2y_1 + \frac{7}{30}s^3r^3 - \frac{1}{2}c^2r^2y_1 - \frac{7}{30}sc^2r^3\right],$$

und ferner, wenn man hierin $x_2 - x_1 = cr$ und $y_2 - y_1 = sr$ setzt:

$$-\frac{H(x_2 - x_1)}{180(1+\delta)}\left\{8y_1^3 + 21y_1^2y_2 + 24y_1y_2^2 + 7y_2^3 - (x_2 - x_1)^2[15y_1 + 7(y_2 - y_1)]\right\},$$

oder

$$-\frac{H(x_2 - x_1)}{360(1+\delta)}\left\{15(y_1 + y_2)^3 - (y_2 - y_1)^3 - 30(x_2 - x_1)^2\left[y_1 + \frac{7}{15}(y_2 - y_1)\right]\right\}.$$

Behuf numerischer Berechnung wird man diesen Werth des Gliedes 4. Ordnung zweckmässig so schreiben:

$$-H(x_2 - x_1)\left\{\alpha(y_1 + y_2)^3 - \beta(y_2 - y_1)^3 - \gamma(x_2 - x_1)^2\left[y_1 + \frac{7}{15}(y_2 - y_1)\right]\right\},$$

worin:

$$\alpha = \frac{1}{24a^2(1+\delta)}; \quad \log \alpha = 5.0077 - 20.$$

$$\beta = \frac{1}{360a^2(1+\delta)}; \quad \log \beta = 3.8316 - 20.$$

$$\gamma = \frac{1}{12a^2(1+\delta)}; \quad \log \gamma = 5.3088 - 20.$$

Der Ausdruck erhält den grössten Absolutwerth, wenn für $x_2 - x_1$ und $y_1 + y_2$ die grösstmöglichen Werthe gesetzt werden, also:

$$y_1 = y_2 = 250000^m; \quad x_2 - x_1 = 400000^m; \quad y_2 - y_1 = 0.$$

Die Rechnung ist daher folgende:

$H \dots$	1.4035		7.0056
$x_2 - x_1 \dots$	5.6021		$\gamma \dots$ 5.3088
	<u>7.0056</u>	$(x_2 - x_1)^2 \dots$	11.2041
$\alpha \dots$	5.0077	$y_1 \dots$	5.3979
$(y_1 + y_2)^3 \dots$	17.0969		<u>8.9164 \dots + 0''.0825</u>
	9.1102 \dots		- 0''.1289
			+ 0.0825
			<u>0''.0464</u>

Grenzwert des Gliedes 4. Ordnung = 0''.0464.

Aus dieser Rechnung ergibt sich mit Hülfe der Tafel III., dass man im Gliede 4. Ordnung für den Umfang des Hannoverschen Dreieckssystems oder eines in der Richtung des Meridians ungefähr gleich ausgedehnten Gebiets, H constant annehmen kann. Für ersteres würde man den Mittelwerth $\log H = 1.4035$ anwenden und diese Zahl in die Constanten α , β , γ aufnehmen.

Das Glied der 5. Ordnung hat ebenfalls 3 mit verschiedenen Coefficienten multiplicirte Theile. Die Coefficienten sind K' , HK , N . Sie enthalten alle drei den Factor δ . Da nun ausserdem, im Vergleich mit dem Gliede 4. Ordnung, noch ein Factor hinzukommt, dessen grösster Werth $= \frac{400000}{a} = 0.06$ ist, so ist offenbar der Absolutwerth des Gliedes 5. Ordnung in allen Fällen kleiner, als die vernachlässigten Theile des Gliedes 4. Ordnung. Es kann deshalb jenes Glied für die Anwendung ganz wegfallen.

Es haben sich für die drei ersten Glieder, welche resp. von der 2., 3. und 4. Ordnung sind, der Reihe nach folgende Grenzwerte ergeben:

$$253'', \quad 0''.023, \quad 0''.046.$$

Die Glieder der 2. und 4. Ordnung, sowie die vernachlässigten Theile dieses letztern, erhalten ihren Maximalwerth, wenn die Gerade ab parallel zur x -Achse ist, wohingegen das Glied der 3. Ordnung am grössten wird, wenn ab parallel zur y -Achse ist. In diesem letztern Falle wird auch der Grenzwert des Gliedes 5. Ordnung eintreten, da derjenige Theil desselben, welcher die grössten Werthe annehmen kann, den Factor $sr = y_2 - y_1$ enthält. Da ferner die Glieder ungerader Ordnung den Factor δ enthalten, in jenen gerader Ordnung aber auch Theile ohne diesen Factor vorkommen, so erklärt es sich, dass das Glied der 4. Ordnung grössere Werthe

erhalten kann, als das der 3., welcher Fall namentlich dann eintreten wird, wenn $x_2 - x_1$ klein ist gegen $y_2 - y_1$. Dagegen ist innerhalb der festgesetzten Grenzen immer das Glied der 4. Ordnung bedeutend kleiner, als das der 2., und ebenso das Glied der 5. Ordnung bedeutend kleiner als das der 3.; und es lässt sich voraussehn, dass auch in den höhern Ordnungen ein analoges Verhältniss stattfinden wird.

Die Maximalwerthe der Glieder 2. und 4. Ordnung sind resp. $253''$ und $0''.046$. Nach den vorausgeschickten Bemerkungen kann man daher schliessen, dass der Maximalwerth des Gliedes 6. Ordnung bedeutend kleiner als $0''.001$ sein wird, und dass daher dieses Glied vernachlässigt werden darf. *)

Um nun Alles für die Anwendung bei einander zu haben, möge das Ergebniss der vorstehenden Entwicklungen folgendermaassen hier zusammengefasst werden.

Die Azimuthreductionen

$$\psi_1 = T_1 - \theta_1 \quad \text{und} \quad \psi_2 = T_2 - \theta_2^{**})$$

werden in Secunden erhalten mittelst der Formeln:

$$34) \quad \begin{cases} \psi_1 = H(x_2 - x_1) \left[y_1 + \frac{1}{3}(y_2 - y_1) \right] - h(y_2 - y_1) \left[y_1^2 + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)^2 - \frac{1}{3}(x_2 - x_1)^2 \right] \\ \quad - H(x_2 - x_1) \left\{ \alpha(y_1 + y_2)^3 - \beta(y_2 - y_1)^3 - \gamma(x_2 - x_1)^2 \left[y_1 + \frac{7}{15}(y_2 - y_1) \right] \right\} \\ \psi_2 = -H(x_2 - x_1) \left[y_2 - \frac{1}{3}(y_2 - y_1) \right] + h(y_2 - y_1) \left[y_2^2 + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)^2 - \frac{1}{3}(x_2 - x_1)^2 \right] \\ \quad + H(x_2 - x_1) \left\{ \alpha(y_1 + y_2)^3 + \beta(y_2 - y_1)^3 - \gamma(x_2 - x_1)^2 \left[y_2 - \frac{7}{15}(y_2 - y_1) \right] \right\} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{1}{24 a^2 (1 + \delta)}; \quad \log \alpha = 5.0077 - 20$$

$$\beta = \frac{1}{360 a^2 (1 + \delta)}; \quad \log \beta = 3.8316 - 20$$

$$\gamma = \frac{1}{12 a^2 (1 + \delta)}; \quad \log \gamma = 5.3088 - 20.$$

Die Grössen H und h entsprechen

in der Formel für ψ_1 dem Argument $x = x_1 + \frac{1}{3}(x_2 - x_1)$

" " " " ψ_2 " " " $x = x_2 - \frac{1}{3}(x_2 - x_1);$

ihre Logarithmen sind in Tafel III. enthalten.

*) Behufs vollständiger Entwicklung des Gliedes 6. Ordnung und der Glieder höherer Ordnungen würde bei der Integration der Gleichungen 22) der Unterschied zwischen 1 und $\cos \psi$, und jener zwischen ψ , $\sin \psi$ und $\tan \psi$ Berücksichtigung finden müssen, was mit Hülfe der bereits ausgeführten Entwicklungen leicht würde geschehn können.

**) T = Azimuth auf dem Sphäroid; θ = Azimuth in plano.

Die Grenzen der allgemeinen Anwendbarkeit der Formeln erstrecken sich bei einer Schärfe von 0.001 Sec. ungefähr bis zu 400000^m Länge der betreffenden Linie und 250000^m Abstand des entlegensten ihrer Endpunkte vom Hauptmeridian.

Rechnungsbeispiele finden sich am Schlusse dieses Zusatzes.

B. Entwicklung der Differenz $\log r - \log R$ bis auf Grössen 5. Ordnung incl.

Es ist streng richtig:

$$R = \int_0^r \frac{d\xi}{m \cos \psi}.$$

Wenn die 5. Ordnung in der Differenz $\log r - \log R$ noch beibehalten werden soll, so ist dieses Integral bis auf die 6. Ordnung incl. zu entwickeln.

Da der Werth $1 + \frac{1}{2} \psi^2$ erst in der 8. Ordnung von $\frac{1}{\cos \psi}$ abweicht, so kann man setzen:

$$R = \int_0^r \frac{d\xi}{m} + \frac{1}{2} \int_0^r \frac{\psi^2}{m} d\xi.$$

Die Rechnung ergibt aus der untern Reihe 24) bis zur 5. Ordnung incl. genau:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} \left[1 - \mu \xi - (\mu_1 - \mu^2) \xi^2 - (\mu_2 - 2\mu\mu_1) \xi^3 - (\mu_3 - \mu_1^2 - 2\mu\mu_2) \xi^4 - (\mu_4 - 2\mu_1\mu_2) \xi^5 \right].$$

Da das zweite Glied dieser Reihe schon von der zweiten Ordnung ist, so kann man bis zur 5. Ordnung incl. genau setzen $\frac{\psi^2}{m_1}$ statt $\frac{\psi^2}{m}$, also bis zur 6. Ordnung einschl. genau:

$$R = \int_0^r \frac{d\xi}{m} + \frac{1}{2m_1} \int_0^r \psi^2 d\xi.$$

Für das erste Integral findet man aus der eben gegebenen Reihe:

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{d\xi}{m} = \frac{r}{m_1} & \left[1 - \frac{1}{2} \mu r - \left(\frac{1}{3} \mu_1 - \frac{1}{3} \mu^2 \right) r^2 - \left(\frac{1}{4} \mu_2 - \frac{1}{2} \mu \mu_1 \right) r^3 \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{5} \mu_3 - \frac{1}{5} \mu_1^2 - \frac{2}{5} \mu \mu_2 \right) r^4 - \left(\frac{1}{6} \mu_4 - \frac{1}{3} \mu_1 \mu_2 \right) r^5 \right]. \end{aligned}$$

Der Werth von ψ^2 ergibt sich bis zur 5. Ordnung incl. genau aus der Gleichung 26), nämlich

$$\psi^2 = \psi_1^2 - 2n_1 \psi_1 \xi + (n_1^2 - \nu \psi_1) \xi^2 + (n_1 \nu - \frac{2}{3} \nu_1 \psi_1) \xi^3 + (\frac{1}{4} \nu^2 + \frac{2}{3} n_1 \nu_1) \xi^4 + \frac{1}{3} \nu \nu_1 \xi^5,$$

woraus:

$$\frac{1}{2m_1} \int_0^r \psi^2 d\xi = \frac{r}{m_1} \left[\frac{1}{2} \psi_1^2 - \frac{1}{2} n_1 \psi_1 r + \left(\frac{1}{6} n_1^2 - \frac{1}{6} \nu \psi_1 \right) r^2 + \left(\frac{1}{8} n_1 \nu - \frac{1}{12} \nu_1 \psi_1 \right) r^3 \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{40} \nu^2 + \frac{1}{15} n_1 \nu_1 \right) r^4 + \frac{1}{36} \nu \nu_1 r^5 \right]$$

und wenn man hierin für ψ_1 seinen Werth aus 25) setzt und nach r ordnet:

$$\frac{1}{2m_1} \int_0^r \psi^2 d\xi = \frac{r}{m_1} \left[\frac{1}{24} n_1^2 r^2 + \frac{1}{24} n_1 \nu r^3 + \left(\frac{1}{90} \nu^2 + \frac{1}{40} n_1 \nu_1 \right) r^4 + \frac{1}{72} \nu \nu_1 r^5 \right].$$

Addirt man diesen Werth zu jenem des Integrals $\int_0^r \frac{d\xi}{m}$, und rangirt nach Ordnungen, so kommt:

$$R = \frac{r}{m_1} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \mu r + \frac{1}{3} \mu_1 r^2 \right) - \frac{1}{4} \mu_2 r^3 + \left(\frac{1}{3} \mu^2 r^2 + \frac{1}{24} n_1^2 r^2 + \frac{1}{2} \mu \mu_1 r^3 + \frac{1}{24} n_1 \nu r^3 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{5} \mu_3 r^4 + \frac{1}{5} \mu_1^2 r^4 + \frac{1}{90} \nu^2 r^4 \right) + \left(\frac{2}{5} \mu \mu_2 r^4 + \frac{1}{40} n_1 \nu_1 r^4 - \frac{1}{6} \mu_4 r^5 + \frac{1}{3} \mu_1 \mu_2 r^5 + \frac{1}{72} \nu \nu_1 r^5 \right) \right].$$

Hieraus ergibt die Rechnung nach der allgemeinen Formel $l(1-z) = -z - \frac{1}{2}z^2 - \dots$ den folgenden logarithmischen Ausdruck bis auf die 5. Ordnung einschl. genau:

$$lr - lR = lm_1 + \left(\frac{1}{2} \mu r + \frac{1}{3} \mu_1 r^2 \right) + \frac{1}{4} \mu_2 r^3 + \left(-\frac{5}{24} \mu^2 r^2 - \frac{1}{24} n_1^2 r^2 - \frac{1}{3} \mu \mu_1 r^3 - \frac{1}{24} n_1 \nu r^3 \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \mu_3 r^4 - \frac{1}{90} \mu_1^2 r^4 - \frac{1}{90} \nu^2 r^4 \right) + \left(-\frac{1}{40} \mu \mu_2 r^4 - \frac{1}{40} n_1 \nu_1 r^4 + \frac{1}{6} \mu_4 r^5 - \frac{1}{4} \mu_1 \mu_2 r^5 - \frac{1}{72} \nu \nu_1 r^5 \right).$$

Substituirt man hierin die auf S. 65 gegebenen Werthe der Grössen $n_1, \nu, \dots; \mu, \mu_1, \dots$, so kommt:

$$lr - lR = H_1 \left[y_1^2 + s r y_1 + \frac{1}{3} s^2 r^2 \right] + K_1 \left[\frac{1}{2} y_1^2 + \frac{2}{3} s r y_1 + \frac{1}{4} s^2 r^2 \right] c r \\ - H_1' \left[y_1^4 + 2 s r y_1^3 + 2 s^2 r^2 y_1^2 + s^3 r^3 y_1 + \frac{1}{5} s^4 r^4 \right] \\ - H_1^2 \left[\frac{1}{6} s^2 r^2 y_1^2 + \frac{1}{6} s^3 r^3 y_1 + \frac{2}{45} s^4 r^4 - \frac{1}{6} c^2 r^2 y_1^2 - \frac{1}{6} s c^2 r^3 y_1 - \frac{2}{45} s^2 c^2 r^4 \right] \\ + L_1 \left[\frac{1}{6} y_1^2 + \frac{1}{4} s r y_1 + \frac{1}{10} s^2 r^2 \right] c^2 r^2 \\ - K_1' \left[\frac{1}{2} y_1^4 + \frac{4}{3} s r y_1^3 + \frac{3}{2} s^2 r^2 y_1^2 + \frac{4}{5} s^3 r^3 y_1 + \frac{1}{6} s^4 r^4 \right] c r \\ - H_1 K_1 \left[\frac{1}{3} s r y_1^3 + \frac{2}{3} s^2 r^2 y_1^2 + \frac{7}{15} s^3 r^3 y_1 + \frac{1}{9} s^4 r^4 - \frac{1}{6} c^2 r^2 y_1^2 - \frac{1}{90} s c^2 r^3 y_1 - \frac{1}{18} s^2 c^2 r^4 \right] c r \\ - N_1 \left[\frac{1}{24} y_1^2 + \frac{1}{15} s r y_1 + \frac{1}{36} s^2 r^2 \right] c^3 r^3.$$

Statt der Coefficienten H_1, K_1 , etc., die der Abscisse x_1 entsprechen, führt man am zweckmässigsten andere H, K , etc. ein, die der Abscisse $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = x_1 + \frac{1}{2} c r$ entsprechen. Diese Transformation lässt ebenso, wie jene der Formeln für ψ_1 und ψ_2 , das Glied der zweiten Ordnung und die mit H_1' und H_1^2 multiplicirten Theile der 4. Ordnung unverändert. Da nun innerhalb der Grenzen, auf welche die Anwendung obiger Formel beschränkt bleiben muss, wie sich zeigen

wird, sowohl der mit L_1 multiplicirte Theil der 4. Ordnung, als auch die ganze 5. Ordnung zu vernachlässigen ist, so hängt, wie in §. 15, die Wahl des zweckmässigsten Arguments für jene Coefficienten hauptsächlich von der daraus hervorgehenden Form des Gliedes 3. Ordnung ab.

Die Einführung der neuen Coefficienten H , K , etc. geschieht mittelst der folgenden Substitutionen:

$$\begin{array}{ll} H_1 = H - \frac{1}{2} K c r + \frac{1}{8} L c^2 r^2 + \frac{1}{48} N c^3 r^3 & H_1' = H' - \frac{1}{2} K' c r \\ K_1 = K - \frac{1}{2} L c r - \frac{1}{8} N c^2 r^2 & K_1' = K' \\ L_1 = L + \frac{1}{2} N c r & H_1^2 = H^2 - H K c r \\ N_1 = N & H_1 K_1 = H K, \end{array}$$

woraus hervorgeht:

$$\begin{aligned} l r - l R = & H \left[y_1^2 + s r y_1 + \frac{1}{3} s^2 r^2 \right] + K \left[\frac{1}{6} y_1 + \frac{1}{12} s r \right] s c r^2 \\ & - H' \left[y_1^4 + 2 s r y_1^3 + 2 s^2 r^2 y_1^2 + s^3 r^3 y_1 + \frac{1}{5} s^4 r^4 \right] \\ & - H^2 \left[\frac{1}{6} y_1^2 + \frac{1}{6} s r y_1 + \frac{2}{45} s^2 r^2 \right] (s^2 r^2 - c^2 r^2) \\ & + L \left[\frac{1}{24} y_1^2 + \frac{1}{24} s r y_1 + \frac{1}{60} s^2 r^2 \right] c^2 r^2 \\ & - K' \left[\frac{1}{3} y_1^3 + \frac{1}{2} s r y_1^2 + \frac{3}{10} s^2 r^2 y_1 + \frac{1}{15} s^3 r^3 \right] s c r^2 \\ & - H K \left[\frac{1}{3} y_1^3 + \frac{1}{2} s r y_1^2 + \frac{3}{10} s^2 r^2 y_1 + \frac{1}{15} s^3 r^3 - \frac{1}{45} c^2 r^2 y_1 - \frac{1}{90} s c^2 r^3 \right] s c r^2 \\ & - N \left[\frac{1}{240} y_1 + \frac{1}{480} s r \right] s c^3 r^4. \end{aligned}$$

Hierin entsprechen die Coefficienten H , K , etc. der Abscisse $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

Die Vereinfachung dieser Formel kann auf ähnliche Weise geschehn, wie die der Formeln für ψ_1 und ψ_2 . Es sollen dabei dieselben Grenzen zu Grunde gelegt werden, wie dort, nämlich $r = 400000^m$, $y_1 = y_2 = 250000^m$. Um hier eine Schärfe zu erreichen, die jener von $\frac{1}{1000}$ Secunden in den Azimuthen entspricht, ist erforderlich, dass die 8. Decimalstelle von $\log r - \log R$ streng beibehalten werde.

Behuf Ausführung der numerischen Rechnungen möge hier gleich bemerkt werden, dass jedes Glied mit dem Modulus M multiplicirt werden muss, um die Differenz der Briggischen Logarithmen: $\log r - \log R$ zu erhalten; und dass der Werth dieser Differenz, sowie der Werth der einzelnen Glieder und Theile der Formel immer in Einheiten der 7. Decimalstelle angegeben werden soll, wesshalb jedem Gliede der Factor 10^7 hinzuzufügen ist. Ferner müssen die Theile der 2., 3., etc. Ordnung resp. durch a^2 , a^3 , etc. dividirt werden, wenn die Coordinaten in irgend einem absoluten Längenmaasse gegeben sind. Endlich soll auch hier bei den numerischen Rechnungen der Tafelwerth:

$$H = \frac{\varrho (1 + \delta \cos \chi^2)^2}{2 a^2 (1 + \delta)}$$

benutzt werden. Nach dem Gesagten ist daher in dem Gliede 2. Ordnung zu setzen:

$$\frac{10^7 \cdot M}{\varrho} H \text{ statt } H,$$

und in dem Gliede 4. Ordnung:

$$\frac{10^7 \cdot M}{\varrho a^2} H \text{ statt } H.$$

Das Glied der zweiten Ordnung ist nach §. 15:

$$H \left[\alpha (y_1 + y_2)^2 + \alpha_1 (y_2 - y_1)^2 \right]$$

$$\alpha = \frac{10^7 \cdot M}{4 \varrho}; \quad \log \alpha = 0.721299$$

$$\alpha_1 = \frac{10^7 \cdot M}{12 \varrho}; \quad \log \alpha_1 = 0.244178.$$

Der Absolutwerth dieses Gliedes wird am grössten, wenn man setzt:

$$y_1 + y_2 = 500000^m, \text{ folglich } y_2 - y_1 = 0.$$

Die Rechnung ist:

$$\begin{array}{r} H \dots 1.4037 \\ \alpha \dots 0.7213 \\ (y_1 + y_2)^2 \dots 11.3979 \\ \hline 3.5229 \dots 3334. \end{array}$$

Es ist demnach $\log H$ aus Tafel III. mit mehr als ausreichender Genauigkeit zu entnehmen.

Das Glied der 3. Ordnung ist:

$$+ \frac{K}{12} (y_1 + y_2)(y_2 - y_1)(x_2 - x_1).$$

Für die Anwendung wird zu setzen sein:

$$\frac{K}{12} = \frac{10^7 \cdot M \delta (1 + \delta)}{12 a^3} \left(\frac{1 + \delta \cos \chi^2}{1 + \delta} \right)^{\frac{5}{2}} \sin 2\chi;$$

und um den auf S. 70 eingeführten Tafelwerth

$$h = \frac{\varrho \delta (1 + \delta)}{6 a^3} \left(\frac{1 + \delta \cos \chi^2}{1 + \delta} \right)^{\frac{5}{2}} \sin 2\chi$$

benutzen zu können:

$$\frac{K}{12} = \frac{10^7 \cdot M}{2 \varrho} h.$$

Für den Gebrauch hergerichtet, ist demnach das Glied der 3. Ordnung:

$$+ h \beta (y_1 + y_2)(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)$$

$$\beta = \frac{10^7 \cdot M}{2 \varrho}; \quad \log \beta = 1.0223.$$

Der Absolutwerth dieses Ausdrucks wird am grössten, wenn man setzt (in runden Zahlen):

$$x_2 - x_1 = 345000^m; \quad y_2 - y_1 = 200000^m; \quad y_2 + y_1 = 300000^m.$$

Für diese Werthe ist die Rechnung:

$$\begin{array}{rcl} h & . . . & 1.9367 \\ \beta & . . . & 1.0223 \\ y_1 + y_2 & . . . & 5.4771 \\ y_2 - y_1 & . . . & 5.3010 \\ x_2 - x_1 & . . . & 5.5378 \\ \hline & & 9.2749 \quad . . . \quad 0.188. \end{array}$$

Schreibt man das Glied der 4. Ordnung so:

$$- H' A - H^2 B + L C$$

und setzt hierin, wie oben (S. 71):

$$\begin{array}{l} \frac{H}{6(1+\delta)} \text{ statt } H' \\ \frac{H}{2(1+\delta)} \text{ statt } H^2 \\ L = 0, \end{array}$$

so wird der dadurch verursachte Fehler ausgedrückt durch:

$$- \frac{H\delta \cos \chi^2}{1+\delta} B + \frac{4 H\delta (1-2 \cos \chi^2)}{1+\delta} C.$$

Die Substitution von $x_2 - x_1 = cr$ und $y_2 - y_1 = sr$ giebt:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{90} [15 y_1^2 + 15 y_1 (y_2 - y_1) + 4 (y_2 - y_1)^2] [(y_2 - y_1)^2 - (x_2 - x_1)^2] \\ &= \frac{1}{360} [15 (y_1 + y_2)^2 + (y_2 - y_1)^2] [(y_2 - y_1)^2 - (x_2 - x_1)^2] \\ C &= \frac{(x_2 - x_1)^2}{120} [5 y_1^2 + 5 y_1 (y_2 - y_1) + 2 (y_2 - y_1)^2] = \frac{(x_2 - x_1)^2}{480} [5 (y_1 + y_2)^2 + 3 (y_2 - y_1)^2]. \end{aligned}$$

Der Ausdruck für den Fehler erhält den grössten Absolutwerth, wenn man setzt:

$$x_2 - x_1 = 400000^m, \quad y_1 + y_2 = 500000^m; \quad y_2 - y_1 = 0,$$

wodurch jener Ausdruck übergeht in:

$$\frac{H\delta \sin \chi^2}{24(1+\delta)} (x_2 - x_1)^2 (y_1 + y_2)^2.$$

Nimmt man $\chi = 55^\circ$, so ist die Rechnung:

$10^7 \cdot M$	6.6378
$1:\varrho$	4.6856
$1:a^2$	6.3908
	7.7142
H	1.4032
δ	7.8221
$\sin \chi^2$	9.8268
$1:24$	8.6198
$1:(1+\delta)$	9.9971
	5.3832
$(x_2 - x_1)^2$	11.2041
$(y_1 + y_2)^2$	11.3979
	7.9852 . . . 0.0097

Der grösste Fehler ist also kleiner als eine Einheit der 9. Decimalstelle und man kann daher das Glied der 4. Ordnung so schreiben:

$$-\frac{H}{6(1+\delta)}(A+3B),$$

oder wenn man die Werthe von A und B substituirt:

$$\begin{aligned} & -\frac{H}{6(1+\delta)} \left[y_1^4 + 2sr y_1^3 + \frac{5}{2}s^2 r^2 y_1^2 + \frac{3}{2}s^3 r^3 y_1 + \frac{1}{3}s^4 r^4 - \frac{1}{2}c^2 r^2 y_1^2 - \frac{1}{2}s c^2 r^3 y_1 - \frac{1}{15}s^2 c^2 r^4 \right] \\ & = -\frac{H}{36(1+\delta)} \left\{ 2y_1^4 + y_1^3 y_2 + y_1 y_2^3 + 2y_2^4 - \frac{1}{5}(x_2 - x_1)^2 [4y_1^2 + 7y_1 y_2 + 4y_2^2] \right\} \\ & = -\frac{H}{1440(1+\delta)} \left\{ 15(y_1 + y_2)^4 + 5(y_2 - y_1)^4 + 60(y_1 + y_2)^2 (y_2 - y_1)^2 \right. \\ & \quad \left. - (x_2 - x_1)^2 [30(y_1 + y_2)^2 + 2(y_2 - y_1)^2] \right\}. \end{aligned}$$

Man wird daher dem Gliede 4. Ordnung folgende gebrauchsfertige Form geben:

$$\begin{aligned} & -H \left\{ \gamma(y_1 + y_2)^4 + \gamma_1(y_2 - y_1)^4 + \gamma_2(y_1 + y_2)^2 (y_2 - y_1)^2 \right. \\ & \quad \left. - (x_2 - x_1)^2 [\gamma_3(y_1 + y_2)^2 + \gamma_4(y_2 - y_1)^2] \right\} \\ & \gamma = \frac{10^7 \cdot M}{96 \varrho a^2 (1+\delta)}; \quad \log \gamma = 5.7290 - 20 \quad \gamma_3 = \frac{10^7 \cdot M}{48 \varrho a^2 (1+\delta)}; \quad \log \gamma_3 = 6.0300 - 20 \\ & \gamma_1 = \frac{10^7 \cdot M}{288 \varrho a^2 (1+\delta)}; \quad \log \gamma_1 = 5.2519 - 20 \quad \gamma_4 = \frac{10^7 \cdot M}{720 \varrho a^2 (1+\delta)}; \quad \log \gamma_4 = 4.8540 - 20 \\ & \gamma_2 = \frac{10^7 \cdot M}{24 \varrho a^2 (1+\delta)}; \quad \log \gamma_2 = 6.3311 - 20 \end{aligned}$$

Der Absolutwerth dieses Gliedes wird am grössten für folgende Werthe:

$$y_1 + y_2 = 500000^m; \quad y_2 - y_1 = 0; \quad x_2 - x_1 = 0.^*)$$

*) Für diese Werthe geht die Gerade ab in einen Punkt über. Es wird also vorzugsweise für lange Linien der fragliche Absolutwerth kleiner ausfallen, als der hier bestimmte Grenzwert. Den Grund hiervon erkennt man auch leicht aus der Form des obigen Ausdrucks, indem dieser aus zwei einander stets entgegengesetzten Theilen besteht.

Die Rechnung ist:

$$\begin{array}{rcl}
 H & . . . & 1.4037 \\
 \gamma & . . . & 5.7290 \\
 (y_1 + y_2)^4 & . . . & 22.7960 \\
 \hline
 & & 9.9287 . . . 0.85
 \end{array}$$

und es folgt hieraus, dass innerhalb eines in der Richtung des Meridians nicht allzu ausgedehnten Gebiets (c. 15 Breitengrade) H constant angenommen und dann mit den Constanten $\gamma, \gamma_1, . . .$ vereinigt werden kann. Für das Hannoversche Dreieckssystem wird zu setzen sein: $\log H = 1.4035$.

Die auf S. 73 und 74 gemachten Bemerkungen in Bezug auf das Glied der 5. und 6. Ordnung finden hier eine ganz analoge Anwendung. Diese Glieder können also auch hier vernachlässigt werden.

Die vorstehenden Untersuchungen haben demnach Folgendes ergeben:

Bezeichnet man die Länge einer geodätischen Linie mit R , die Länge der zwischen den Projectionen ihrer Endpunkte enthaltenen Geraden mit r , und die Coordinaten dieser Projectionen mit $x_1, y_1; x_2, y_2$, so ist:

$$\begin{aligned}
 35) \quad . . . \log r - \log R = & H \left[\alpha (y_1 + y_2)^2 + \alpha_1 (y_2 - y_1)^2 \right] + h \beta (y_1 + y_2)(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) \\
 & - H \left\{ \gamma (y_1 + y_2)^4 + \gamma_1 (y_2 - y_1)^4 + \gamma_2 (y_1 + y_2)^2 (y_2 - y_1)^2 \right. \\
 & \left. - (x_2 - x_1)^2 \left[\gamma_3 (y_1 + y_2)^2 + \gamma_4 (y_2 - y_1)^2 \right] \right\}^*
 \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{10^7 \cdot M}{4 \varrho}; \quad \log \alpha = 0.721299$$

$$\alpha_1 = \frac{10^7 \cdot M}{12 \varrho}; \quad \log \alpha_1 = 0.244178$$

$$\beta = \frac{10^7 \cdot M}{2 \varrho}; \quad \log \beta = 1.0223$$

$$\gamma = \frac{10^7 \cdot M}{96 \varrho a^2 (1 + \delta)}; \quad \log \gamma = 5.7290 - 20$$

$$\gamma_1 = \frac{10^7 \cdot M}{288 \varrho a^2 (1 + \delta)}; \quad \log \gamma_1 = 5.2519 - 20$$

$$\gamma_2 = \frac{10^7 \cdot M}{24 \varrho a^2 (1 + \delta)}; \quad \log \gamma_2 = 6.3311 - 20$$

$$\gamma_3 = \frac{10^7 \cdot M}{48 \varrho a^2 (1 + \delta)}; \quad \log \gamma_3 = 6.0300 - 20$$

$$\gamma_4 = \frac{10^7 \cdot M}{720 \varrho a^2 (1 + \delta)}; \quad \log \gamma_4 = 4.8540 - 20.$$

Die Differenz $\log r - \log R$ wird in Einheiten der 7. Decimalstelle erhalten.

Die Logarithmen der Grössen H und h sind für das Argument $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ aus Tafel III. zu entnehmen.

Die Grenzen der allgemeinen Anwendbarkeit der Formel erstrecken sich bei einer Schärfe von nahezu einer Einheit der 9. Decimalstelle**) bis zu 400000^m Länge der betreffenden Linie, und 250000^m Abstand des entlegensten ihrer Endpunkte vom Hauptmeridian.

*) Wie es sein muss, bleibt diese Formel unverändert, wenn man die Punkte a und b mit einander vertauscht.

**) Als grösster Fehler, welcher aus der Vernachlässigung der mit δ, δ^2 , etc. multiplicirten Theile 4. Ordnung entspringen kann, wurde gefunden: 0.0097. Da die vernachlässigten Glieder der 5. und 6. Ordnung jedenfalls bedeutend kleinere Maximalwerthe haben, so ist die obige Angabe der Genauigkeitsgrenze begründet.

Erstes Beispiel. Nach dem Gauss'schen Coordinatenverzeichnisse ist:

	x	y
Göttingen	0	0
Altona	— 224495.328	+ 16.354
Bentheim	— 89758.066	+ 190025.198

Es soll hieraus berechnet werden:

- 1) Länge und Breite der drei Punkte.
- 2) Das astronomische Azimuth und der Logarithmus der Länge jeder Seite des sphäroidischen Dreiecks Göttingen-Altona-Bentheim.

Die Rechnung in plano nach den Formeln:

$$\operatorname{tg} \theta_{1.2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad r = \frac{y_2 - y_1}{\sin \theta_{1.2}} = \frac{x_2 - x_1}{\cos \theta_{1.2}}$$

ergiebt:

	Azimuth in plano θ	retour	Log. d. Länge in Metern $\log r$
Göttingen - Altona	179° 59' 44".9740	359° 59' 44".9740	5.351 2073 085
Altona - Bentheim	54 39 32 .9294	234 39 32 .9294	5.367 2298 518
Bentheim - Göttingen	295 17 1 .0510	115 17 1 .0510	5.322 5444 583

Ferner findet man nach den Formeln 13) und 16) auf S. 29 und 32:

	Geogr. Breite φ	Länge westl. v. Gött. λ	Convergenz d. Merid. c
Göttingen	51° 31' 47".85	0° 0' 0".0000	0° 0' 0".0000
Altona	53 32 52 .1880	+ 0 0 0 .8884	+ 0 0 0 .7146
Bentheim	52 18 14 .2138	+ 2 47 12 .4374	+ 2 12 20 .6816

Um aus $\log r$, θ und c die unter 2) genannten Stücke zu erhalten, sind nach den Formeln 34) und 35) (S. 74 und 81) die Reductionen ψ_1 , ψ_2 und $\log r - \log R$ zu berechnen. Diese Rechnung ist in dem folgenden Schema enthalten.

Berechnung der Reductionen ψ_1, ψ_2 und $\log r - \log R$ für die Seiten des Dreiecks Göttingen-Altona-Bentheim.

	Gött. - Alt.	Alt. - Benth.	Benth. - Gött.		Gött. - Alt.	Alt. - Benth.	Benth. - Gött.
$x_1 =$	0	-224495.3	-89758.1	$H \dots$	1.403490	1.403398	1.403503
$x_2 =$	-224495.3	-89758.1	0	$x_2 - x_1 \dots$	5.351207	5.129488	4.953073
$y_1 =$	0	+16.4	+190025.2	$y_1 + \frac{1}{3}(y_2 - y_1) \dots$	0.7404	4.801765	5.102720
$y_2 =$	+16.4	+190025.2	0		7.4951	1.334651	1.459296
$x_2 - x_1 =$	-224495.3	+134737.2	+89758.1		-0".0031	+21".6098	+28".7936
$x_1 + \frac{1}{3}(x_2 - x_1) =$	-74800	-179600	-59800	$h \dots$		1.9250	1.9296
$x_2 - \frac{1}{3}(x_2 - x_1) =$	-149700	-134700	-29900	$y_2 - y_1 \dots$		5.2788	5.2788
$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) =$	-112200	-157100	-44900			7.2038	7.2084
$y_1 + y_2 =$	+16.4	+190041.6	+190025.2	$y_1^2 \dots$			0.5576
$y_2 - y_1 =$	+16.4	+190008.8	-190025.2				7.7660 + 58
$y_1 + \frac{1}{3}(y_2 - y_1) =$	+5.5	+63352.7	+126683.5	$\frac{1}{2} \dots$		9.6990	9.6990
$y_2 - \frac{1}{3}(y_2 - y_1) =$	+10.9	+126688.9	+63341.7	$(y_1 + y_2)^2 \dots$		0.5577	0.5576
$y_1 + \frac{7}{15}(y_2 - y_1) =$	+10	+88680	+101350			7.4605 - 29	7.4650 + 29
$y_2 - \frac{7}{15}(y_2 - y_1) =$	+10	+101360	+88680	$\frac{1}{3} \dots$		9.5229	9.5229
				$(x_2 - x_1)^2 \dots$		0.2590	9.9061
						6.9857 + 10	6.6374 - 4
				$H(x_2 - x_1) \dots$		6.5329	6.3566
				$\alpha \dots$		5.0077	5.0077
				$(y_1 + y_2)^3 \dots$		5.8365	5.8364
						7.3771 - 24	7.2007 - 16
$H \dots$		1.403418	1.403516	$\beta \dots$		3.8316	3.8316
$\alpha \dots$		0.721299	0.721299	$(y_2 - y_1)^3 \dots$		5.8363	5.8364
$(y_1 + y_2)^2 \dots$		0.557698	0.557622			6.2008 + 2	6.0246 - 1
		2.682415	2.682437	$\gamma \dots$		5.3088	5.3088
		+481.299	+481.323	$(x_2 - x_1)^2 \dots$		0.2590	9.9061
$\alpha_1 \dots$		0.244178	0.244178	$y_1 + \frac{7}{15}(y_2 - y_1)$		4.9478	5.0058
$(y_2 - y_1)^2 \dots$		0.557546	0.557622			7.0485 + 11	6.5773 + 4
		2.205142	2.205316				
		+160.377	+160.441	$\psi_1 =$	-0".0031	+21".6068	+28".8006
$h \dots$		1.9259	1.9301				
$\beta \dots$		1.0223	1.0223	retour.		retour.	retour.
$y_1 + y_2 \dots$		5.2788	5.2788	$H \dots$	1.403424	1.403437	1.403529
$y_2 - y_1 \dots$		5.2788	5.2788	$x_2 - x_1 \dots$	5.351207	5.129488	4.953073
$x_2 - x_1 \dots$		5.1295	4.9531	$y_2 - \frac{1}{3}(y_2 - y_1) \dots$	1.0374	5.102738	4.801690
		8.6353 + 43	8.4631 - 29		7.7920	1.635663	1.158292
					+0".0062	-43".2178	-14".3977
$H \dots$		1.4034	1.4035	$h \dots$		1.9268	1.9307
$\gamma \dots$		5.7290	5.7290	$y_2 - y_1 \dots$		5.2788	5.2788
$(y_1 + y_2)^4 \dots$		1.1154	1.1152			7.2056	7.2095
		8.2478 - 18	8.2477 - 18	$y_2^2 \dots$		0.5576	
						7.7632 + 58	
$\gamma_1 \dots$		5.2519	5.2519	$\frac{1}{2}(y_1 + y_2)^2 \dots$		0.2567	0.2566
$(y_2 - y_1)^4 \dots$		1.1151	1.1152			7.4623 + 29	7.4661 - 29
		7.7704 - 6	7.7706 - 6	$\frac{1}{3}(x_2 - x_1)^2 \dots$		9.7819	9.4290
						6.9875 - 10	6.6385 + 4
$\gamma_2 \dots$		6.3311	6.3311	$H(x_2 - x_1) \dots$		6.5329	6.3566
$(y_1 + y_2)^2 \dots$		0.5577	0.5576	$\alpha(y_1 + y_2)^3 \dots$		0.8442	0.8441
$(y_2 - y_1)^2 \dots$		0.5575	0.5576			7.3771 + 24	7.2007 + 16
		8.8497 - 71	8.8498 - 71	$\beta(y_2 - y_1)^3 \dots$		9.6679	9.6680
$(x_2 - x_1)^2 \dots$		0.2590	9.9061			6.2008 + 2	6.0246 - 1
		1.6624	1.3096	$\gamma(x_2 - x_1)^2 \dots$		5.5678	5.2149
$\gamma_3 \dots$		6.0300	6.0300	$y_2 - \frac{7}{15}(y_2 - y_1) \dots$		5.0059	4.9478
$(y_1 + y_2)^2 \dots$		0.5577	0.5576			7.1066 - 13	6.5193 - 3
		8.2501 + 18	7.8972 + 8				
$\gamma_4 \dots$		4.8540	4.8540	$\psi_2 =$	+0".0062	-43".2088	-14".3990
$(y_2 - y_1)^2 \dots$		0.5575	0.5576				
		7.0739 + 1	6.7212 + 1				
$\log r - \log R =$	0.000	641.643	641.649				

Die folgenden Tableaux, welche ohne weitere Erklärung verständlich sein werden, enthalten eine Zusammenstellung sämtlicher gegebenen und berechneten Bestimmungsstücke des ebenen und des sphäroidischen Dreiecks Göttingen-Altona-Bentheim.

Punkt.	Abscisse. x	Ordinate. y	Geogr. Breite. φ	Länge westl. v. Gött. λ	Convergenz d. Merid. c
Göttingen	0	0	51° 31' 47" .8500	0° 0' 0" .0000	0° 0' 0" .0000
Altona	— 224495 ^m .328	+ 16 ^m .354	53 32 52 .1880	+ 0 0 0 .8884	+ 0 0 0 .7146
Bentheim	— 89758 .066	+ 190025 .198	52 18 14 .2138	+ 2 47 12 .4374	+ 2 12 20 .6816

Dreiecksseite.	Azimuth in plano. θ_1	Azimuth-Reductionen. *)		Azimuth in plano $\theta_2 = 180 + \theta_1$	Azimuth auf dem Sphäroid.	
		$\psi_1 = T_1 - \theta_1$	$\psi_2 = T_2 - \theta_2$		T_1	T_2
Göttingen-Altona	179° 59' 44" .9740	— 0" .0031	+ 0" .0062	359° 59' 44" .9740	179° 59' 44" .9709	359° 59' 44" .9802
Altona-Bentheim	54 39 32 .9294	+ 21 .6068	— 43 .2088	234 39 32 .9294	54 39 54 .5362	234 38 49 .7206
Bentheim-Göttingen	295 17 1 .0510	+ 28 .8006	— 14 .3990	115 17 1 .0510	295 17 29 .8516	115 16 46 .6520

Dreiecksseite.	Astronomisches Azimuth.		Log. d. Länge in pl.	Red. d. Länge	Log. d. Länge a. d. S.
	$t_1 = T_1 - c_1$	$t_2 = T_2 - c_2$	$\log r$	$\log r - \log R$	$\log R$
Göttingen-Altona	179° 59' 44" .971	359° 59' 44" .266	5.351 2073 085	0 000	5.351 2073 08.5
Altona-Bentheim	54 39 53 .822	232 26 29 .039	5.367 2298 518	641 643	5.367 1656 87.5
Bentheim-Göttingen	293 5 9 .170	115 16 46 .652	5.322 5444 583	641 649	5.322 4802 93.4

Zweites Beispiel. Nach dem Berliner astronomischen Jahrbuch für 1852 ist:

	Geogr. Breite.	Oestl. Länge v. Ferro.
Berlin	52° 30' 16" .7	31° 3' 30" .0
Leipzig	51 20 20 .1	30 1 45 .0
Breslau	51 6 56 .0	34 42 7 .5

Es sollen hieraus die astronomischen Azimuthe und der Logarithmus der Länge jeder Seite des sphäroidischen Dreiecks Berlin-Leipzig-Breslau berechnet werden.

Diese Aufgabe ist, wiewohl etwas umständlich, mit Hülfe der Gauss'schen Projection auf folgende Weise zu lösen.

Da die Schärfe der Rechnung durch kleine Abstände der Dreieckspunkte vom Hauptmeridian bedingt wird, so nehme man diesen zwischen denjenigen beiden Punkten (Leipzig und Breslau), welche den grössten Längenunterschied haben, ungefähr mitten inne liegend an. Die geographische Breite des Anfangspunktes ist an sich ziemlich gleichgültig. Um jedoch die angehängten Tafeln benutzen zu können, muss man die

*) Die Differenz zwischen der Summe der drei Reductionen ψ_1 und der Summe jener ψ_2 giebt den sphäroidischen Excess des Dreiecks:

$$= 108'' .0059 = 1' 48'' .0059.$$

Vergl. Zusatz II, Formel 36) und zweites Beispiel.

für diese zu Grunde gelegte Breite des Anfangspunktes beibehalten. Wie in den Beispielen auf S. 21 und 33 soll daher für den Anfangspunkt angenommen werden:

$$\text{geogr. Breite} = 51^{\circ} 31' 47''.85$$

$$\text{östliche Länge von Ferro} = 32 \ 22 \ 0.$$

Man hat dann

	Geogr. Breite. φ	Länge vom Hauptmeridian + westlich, — östlich λ
Berlin	$52^{\circ} 30' 16''.7$	$+ 0^{\circ} 18' 30''.0$
Leipzig	$51 \ 20 \ 20 .1$	$+ 2 \ 20 \ 15 .0$
Breslau	$51 \ 6 \ 56 .0$	$- 2 \ 20 \ 7 .5$

Es werden nun der Reihe nach folgende Rechnungen zu führen sein:

- 1) Berechnung der ebenen Coordinaten der drei Punkte aus Breite und Länge.
- 2) Berechnung des Azimuths und der Länge jeder Seite des ebenen Dreiecks aus den ebenen Coordinaten der Dreieckspunkte.
- 3) Berechnung der Convergenz des Meridians in jedem Dreieckspunkte aus den ebenen Coordinaten.
- 4) Berechnung der Reductionen ψ_1 , ψ_2 und $\log r - \log R$ für jede Dreiecksseite aus den ebenen Coordinaten.

Die Rechnung unter 1) ist in dem Beispiele auf Seite 21, und jene unter 3) in dem Beispiele auf S. 33 geführt. Wenn die in der Anmerkung auf S. 34 bezeichnete Tafel zu Gebote steht, so ist es kürzer, die Rechnung 3) nach der in jener Anmerkung gegebenen Formel für $\log c$ mit 1) zugleich zu führen.

Die Rechnungen 2) und 4) können ganz nach dem Muster des vorigen Beispiels geführt werden. Die Resultate sind in den folgenden Tableaux zusammen gestellt:

Punkt.	Geogr. Breite. φ	östl. Länge v. F.	Länge v. Hptmer. λ	Ebene Coordinaten. x y		Convergenz d. Mer. c
Berlin	$52^{\circ} 30' 16''.7$	$31^{\circ} \ 3' \ 30''.0$	$+ 0^{\circ} 18' 30''.0$	$- 108471^m.861$	$+ 20931^m.459$	$+ 0^{\circ} 14' 40''.6801$
Leipzig	$51 \ 20 \ 20 .1$	$30 \ 1 \ 45 .0$	$+ 2 \ 20 \ 15 .0$	$+ 18655 .741$	$+ 162837 .816$	$+ 1 \ 49 \ 32 .3279$
Breslau	$51 \ 6 \ 56 .0$	$34 \ 42 \ 7 .5$	$- 2 \ 20 \ 7 .5$	$+ 43500 .160$	$- 163482 .512$	$- 1 \ 49 \ 5 .9520$

Dreiecksseite.	Azimuth in plano. θ_1	Azimuth-Reductionen. $\psi_1 = T_1 - \theta_1$ $\psi_2 = T_2 - \theta_2$		Azimuth in plano. $\theta_2 = 180^{\circ} + \theta_1$	Azimuth auf dem Sphäroid. T_1 T_2	
Berlin - Leipzig	$48^{\circ} \ 8' \ 39''.3009$	$+ 21''.9627$	$- 37''.1899$	$228^{\circ} \ 8' \ 39''.3009$	$48^{\circ} \ 9' \ 1''.2636$	$228^{\circ} \ 8' \ 2''.1110$
Leipzig - Breslau	$274 \ 21 \ 13 .7463$	$+ 3 .4091$	$+ 3 .4350$	$94 \ 21 \ 13 .7463$	$274 \ 21 \ 17 .1554$	$94 \ 21 \ 17 .1813$
Breslau - Berlin	$129 \ 29 \ 28 .6129$	$+ 39 .2565$	$- 15 .6007$	$309 \ 29 \ 28 .6129$	$129 \ 30 \ 7 .8694$	$309 \ 29 \ 13 .0122$

Dreiecksseite.	Astronomisches Azimuth. $t_1 = T_1 - c_1$ $t_2 = T_2 - c_2$		Log. d. Länge in pl. $\log r$	Red. d. Länge. $\log r - \log R$	Log. d. Länge a. d. S. $\log R$
Berlin - Leipzig	$47^{\circ} 54' 20''.583.5$	$226^{\circ} 18' 29''.783$	$5.279 \ 9463 \ 815$	$539 \ 620$	$5.279 \ 8924 \ 19.5$
Leipzig - Breslau	$272 \ 31 \ 44 .827.5$	$96 \ 10 \ 23 .133$	$5.514 \ 8991 \ 992$	$473 \ 158$	$5.514 \ 8518 \ 83.4$
Breslau - Berlin	$131 \ 19 \ 13 .821.4$	$309 \ 14 \ 32 .332$	$5.378 \ 3332 \ 954$	$421 \ 984$	$5.378 \ 2910 \ 97.0$

Anmerkung. Um für die Richtigkeit der Formeln 34) (S. 74) eine Bestätigung zu erhalten, habe ich erstens die obige Rechnung für die Azimuthe der Seite Breslau-Berlin mit mehr Decimalstellen wiederholt und zweitens die Azimuthe dieser Seite mit Hülfe der Gauss'schen Projection auf die Kugel (Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie. Erste Abhandlung. 1843.) berechnet. Es mögen hier die Hauptmomente dieser beiden Rechnungen folgen.

Die erste Rechnung hat ergeben:

$$\begin{aligned} \text{Breslau} \dots x_1 &= + 43500^m.157050; & y_1 &= - 163482^m.51180. \\ \text{Berlin} \dots x_2 &= - 108471.861352; & y_2 &= + 20931.45876. \end{aligned}$$

Breslau-Berlin.		Berlin-Breslau.	
Az. in plano	$\theta_1 = 129^0 29' 28''.61135$	$\theta_2 = 180^0 + \theta_1 = 309^0 29' 28''.61135$	
Reduction $\psi_1 = T_1 - \theta_1 =$	$+ 39.25640$	$\psi_2 = T_2 - \theta_2 =$	$- 15.60068$
Az. a. d. Sph.	$T_1 = 129 \ 30 \ 7.86775$	$T_2 = 309 \ 29 \ 13.01067$	
Conv. d. Mer.	$c_1 = -1 \ 49 \ 5.95202$	$c_2 = + 14 \ 40.68009$	
Astron. Az. $t_1 = T_1 - c_1 =$	$131 \ 19 \ 13.81977$	$t_2 = T_2 - c_2 =$	$309 \ 14 \ 32.33058$

Diese Rechnung ist so scharf geführt, als die Anwendung zehnstelliger Logarithmentafeln gestattet. Die in den Tafeln I. und II. gegebenen Decimalstellen sind hierzu nicht ausreichend.

Die Rechnung durch Hülfe der Projection auf die Kugel liefert, mit den Bezeichnungen von Gauss:

	Breite		Längenunterschied	
	auf dem Ellipsoid $P + p$	auf der Kugel $Q + q$	auf dem Ellipsoid t	auf der Kugel $T = at$
Breslau	$51^0 \ 6' \ 56''.0$	$51^0 \ 5' \ 2''.637445$	$2^0 \ 38' \ 37''.5$	$2^0 \ 38' \ 41''.7589225$
Berlin	$52 \ 30 \ 16.7$	$52 \ 28 \ 16.506840$		

Breslau-Berlin.		Berlin-Breslau.	
Azimuth auf der Kugel	$V_0 = 131^0 \ 19' \ 13''.82734$	$V_1 = 309^0 \ 14' \ 32''.32745$	
Reduction	$\psi_0 = - 764$	$\psi_1 = + 303$	
Azimuth auf dem Ellipsoid $V_0 + \psi_0 =$	$131 \ 19 \ 13.81970$	$V_1 + \psi_1 =$	$309 \ 14 \ 32.33048$

Also:

Differenz zwischen den Endresultaten

$$\text{beider Rechnungen} \dots \dots \dots + 0''.00007 \qquad \qquad \qquad + 0''.00010.$$

Zur Berechnung der Reductionen ψ_0 und ψ_1 sind die in §. 13 der Gauss'schen Abhandlung gegebenen Formeln nicht ausreichend; es wurden vielmehr die folgenden schärfern angewandt:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= - \frac{1}{60} h (13 k_0 \sin \chi_0 + 36 k_{\frac{1}{3}} \sin \chi_{\frac{1}{3}} + 9 k_{\frac{2}{3}} \sin \chi_{\frac{2}{3}} + 2 k_1 \sin \chi_1) \\ \psi_1 &= + \frac{1}{60} h (2 k_0 \sin \chi_0 + 9 k_{\frac{1}{3}} \sin \chi_{\frac{1}{3}} + 36 k_{\frac{2}{3}} \sin \chi_{\frac{2}{3}} + 13 k_1 \sin \chi_1) \end{aligned}$$

Analog den Bezeichnungen der §§. 12 und 13 der Gauss'schen Abhandlung bezeichnen hier $k_0, k_{\frac{1}{3}}, k_{\frac{2}{3}}, k_1$ und $\chi_0, \chi_{\frac{1}{3}}, \chi_{\frac{2}{3}}, \chi_1$ die bestimmten Werthe von

$$- \frac{206265'' dm}{2 m dS} \text{ und } \chi$$

in den Punkten $x=0, x=\frac{1}{3}h, x=\frac{2}{3}h, x=h$ des grössten Kreisbogens N .

Zusatz II.

Berechnung des Excesses der Winkelsumme eines sphäroidischen Dreiecks aus den ebenen Coordinaten seiner Winkelpunkte.

In dem sphäroidischen Dreiecke (1).(2).(3) mögen die Azimuthe (a. d. Sphäroid) der Seiten mit $T_{1.2}$, $T_{2.1}$, $T_{2.3}$, etc., im entsprechenden ebenen Dreiecke mit $\theta_{1.2}$, $\theta_{2.1}$, $\theta_{2.3}$, etc., und die ebenen Coordinaten der Winkelpunkte mit x_1 , y_1 , x_2 , y_2 , x_3 , y_3 bezeichnet werden. Diese Bezeichnung sei so angeordnet, dass man in (2) eine Drehung links (derjenigen entgegengesetzt, nach welcher die Azimuthe gezählt werden) zu machen hat, um von (1) über (2) nach (3) zu gelangen.

Die Winkelsumme des sphäroidischen Dreiecks ist dann:

$$\text{entweder: } \left\{ \begin{array}{l} T_{1.2} - T_{1.3} \\ + T_{2.3} - T_{2.1} \\ + T_{3.1} - T_{3.2} \end{array} \right\}, \quad \text{oder} \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{1.2} - T_{1.3} \\ + T_{2.3} - T_{2.1} \\ + T_{3.1} - T_{3.2} \end{array} \right\} + 360^\circ,$$

je nachdem die drei Azimuth-Differenzen sämmtlich positiv sind, oder eine von ihnen negativ ist. Dasselbe gilt von der Winkelsumme des ebenen Dreiecks, welche man erhält, wenn man in diesen Ausdrücken T durch θ ersetzt.

In beiden Fällen ist daher die Differenz zwischen der Winkelsumme des sphäroidischen Dreiecks und jener des ebenen, oder (weil die Winkelsumme im ebenen Dreiecke 180° beträgt) der sphäroidische Excess:

$$\varepsilon = \left\{ \begin{array}{l} T_{1.2} - T_{2.1} \\ + T_{2.3} - T_{3.2} \\ + T_{3.1} - T_{1.3} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \theta_{1.2} - \theta_{2.1} \\ + \theta_{2.3} - \theta_{3.2} \\ + \theta_{3.1} - \theta_{1.3} \end{array} \right\},$$

wo zugleich eine andere Anordnung der Differenzen getroffen ist.

Setzt man analog der schon vielfach gebrauchten Bezeichnung:

$$T_{1.2} - \theta_{1.2} = \psi_{1.2}, \text{ etc.,}$$

so hat man:

$$36) \dots \dots \dots \varepsilon = \begin{Bmatrix} \psi_{1.2} - \psi_{2.1} \\ + \psi_{2.3} - \psi_{3.2} \\ + \psi_{3.1} - \psi_{1.3} \end{Bmatrix}.$$

Durch Entwicklung der Differenz $\psi_{1.2} - \psi_{2.1}$ erhält man nach den Formeln 31) (wo ψ_1 und ψ_2 dieselbe Bedeutung haben, wie hier $\psi_{1.2}$ und $\psi_{2.1}$) folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \psi_{1.2} - \psi_{2.1} = & H_1(2y_1 + sr)cr - K_1(sry_1^2 + s^2r^2y_1 + \tfrac{1}{3}s^3r^3 - c^2r^2y_1 - \tfrac{2}{3}sc^2r^3) \\ & - \frac{H_1}{6(1+\delta)}(4y_1^3 + 6sry_1^2 + 3s^2r^2y_1 + \tfrac{1}{2}s^3r^3 - c^2r^2y_1 - \tfrac{1}{2}sc^2r^3)cr, \end{aligned}$$

wenn man nämlich wie früher: $H_1' = \frac{H_1}{6(1+\delta)}$, $H_1^2 = \frac{H_1}{2(1+\delta)}$, $L=0$ setzt, und das Glied der 5. Ordnung vernachlässigt. Die Substitutionen $x_2 - x_1 = cr$ und $y_2 - y_1 = sr$ verwandeln diesen Ausdruck in:

$$\begin{aligned} \psi_{1.2} - \psi_{2.1} = & H_1(x_2 - x_1)(y_1 + y_2) - \tfrac{1}{6}K_1\{[y_1^2 + y_2^2 + (y_1 + y_2)^2](y_2 - y_1) \\ & - 2(x_2 - x_1)^2(y_1 + 2y_2)\} + \frac{H_1}{12(1+\delta)}(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)[(x_2 - x_1)^2 - (y_1 + y_2)^2]. \end{aligned}$$

Die Coefficienten H_1 und K_1 entsprechen in diesen Formeln der Abscisse x_1 des Punktes (1).

Für die beiden andern Differenzen $\psi_{2.3} - \psi_{3.2}$ und $\psi_{3.1} - \psi_{1.3}$ wird man ganz analoge Ausdrücke erhalten, in welchen die Coefficienten resp. den Abscissen x_2 und x_3 entsprechen.

Um die drei Ausdrücke durch Addition vereinigen zu können, ist es zuvor erforderlich, sämtlichen Coefficienten ein gemeinschaftliches Argument zu geben. Es liegt am nächsten, hierzu das arithmetische Mittel aus den Abscissen der drei Winkelpunkte, d. i. die Abscisse:

$$\tfrac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) = x_1 + \tfrac{1}{3}[(x_2 - x_1) + (x_3 - x_1)] = \text{etc.}$$

zu wählen. Und in der That, transformirt man die drei Ausdrücke analog dem auf S. 66 und 67 gegebenen Verfahren*) und addirt, so verschwindet das Glied der 3. Ordnung, und man erhält für den sphäroidischen Excess folgende Formel:

$$\varepsilon = H \begin{Bmatrix} (x_2 - x_1)(y_1 + y_2) \\ + (x_3 - x_2)(y_2 + y_3) \\ + (x_1 - x_3)(y_3 + y_1) \end{Bmatrix} + \frac{H}{12(1+\delta)} \begin{Bmatrix} (x_2 - x_1)(y_1 + y_2)[(x_2 - x_1)^2 - (y_1 + y_2)^2] \\ + (x_3 - x_2)(y_2 + y_3)[(x_3 - x_2)^2 - (y_2 + y_3)^2] \\ + (x_1 - x_3)(y_3 + y_1)[(x_1 - x_3)^2 - (y_3 + y_1)^2] \end{Bmatrix}.$$

Setzt man

$$s = y_1 + y_2 + y_3$$

und versteht unter H den Tafelwerth, so erhält die Formel folgende gebrauchsfertige Gestalt:

*) Durch diese Transformation wird nur das Glied der 3. Ordnung abgeändert. Für die Differenz $\psi_{1.2} - \psi_{2.1}$ wird dieses:

$$-\tfrac{1}{6}K\{(y_2 - y_1)[y_1^2 + y_2^2 + (y_1 + y_2)^2] + 2(x_2 - x_1)[y_1(x_3 - x_1) + y_2(x_3 - x_2)]\}.$$

$$37) \quad \varepsilon = H \left\{ \begin{array}{l} (x_2 - x_1)(s - y_3) \\ + (x_3 - x_2)(s - y_1) \\ + (x_1 - x_3)(s - y_2) \end{array} \right\} + H\alpha \left\{ \begin{array}{l} (x_2 - x_1)(s - y_3)[(x_2 - x_1)^2 - (s - y_3)^2] \\ + (x_3 - x_2)(s - y_1)[(x_3 - x_2)^2 - (s - y_1)^2] \\ + (x_1 - x_3)(s - y_2)[(x_1 - x_3)^2 - (s - y_2)^2] \end{array} \right\}$$

$$\alpha = \frac{1}{12 a^2 (1 + \delta)}; \quad \log \alpha = 5.3088 - 10.$$

Diese Formel giebt die 3. Decimalstelle von ε , in Secunden ausgedrückt, noch vollkommen scharf, wenn keine der Dreiecksseiten die Länge von 400000^m übersteigt, und keiner der Winkelpunkte einen grössern Abstand vom Hauptmeridian hat als 250000^m.

Für die Anwendung auf Dreiecke, welche die Grösse wirklich messbarer Dreiecke nicht übersteigen, wird stets das erste Glied, welches von der zweiten Ordnung ist, ausreichend sein. Es ist dann vortheilhafter, der Formel eine der folgenden Gestalten zu geben.

Man setze:

$$x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3).$$

Dann ist:

$$38) \quad \dots \dots \dots \varepsilon = H \left\{ \begin{array}{l} (x - x_1)(y_2 - y_3) \\ + (x - x_2)(y_3 - y_1) \\ + (x - x_3)(y_1 - y_2) \end{array} \right\}.$$

Oder man setze:

$$y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3);$$

dann ist:

$$39) \quad \dots \dots \dots \varepsilon = H \left\{ \begin{array}{l} (y - y_1)(x_3 - x_2) \\ + (y - y_2)(x_1 - x_3) \\ + (y - y_3)(x_2 - x_1) \end{array} \right\}.$$

Oder endlich:

$$40) \quad \dots \dots \dots \varepsilon = H \left[(y_1 - y_2)(x_2 - x_3) - (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) \right].^*)$$

Von diesen drei Ausdrücken, deren Identität mit dem ersten Gliede der Formel 37) leicht nachzuweisen, haben die ersten beiden den Vorzug, dass sie für die drei Theile, aus denen jeder derselben besteht, möglichst kleine Werthe geben, während der letzte Ausdruck nur die Berechnung von zwei Theilen erfordert.

In allen vier Formeln 37) bis 40) ist der Logarithmus von H aus Tafel III. für das Argument

$$x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$$

zu entnehmen.

Schliesslich mag noch erinnert werden, dass die von irgend einem innerhalb des Dreiecks liegenden Punkte aus gedachte Drehungsrichtung 1.2.3 derjenigen, nach

*) Bezeichnet man die Winkel des ebenen Dreiecks mit A, B, C ; die ihnen gegenüber liegenden Seiten mit a, b, c , und deren Azimuthe mit AB, BA , etc., so hat man in obiger Formel:

$$y_1 - y_2 = c \sin BA, \quad y_2 - y_3 = a \sin CB, \\ x_2 - x_3 = a \cos CB, \quad x_1 - x_2 = c \cos BA;$$

mithin:

$$\varepsilon = H \cdot a \cdot c [\sin BA \cos CB - \cos BA \sin CB],$$

oder wegen $CB = 180^\circ + BC$:

$$\varepsilon = H \cdot a \cdot c [\sin BC \cos BA - \cos BC \sin BA] \\ = H \cdot a \cdot c \sin (BC - BA) = H \cdot a \cdot c \sin B,$$

oder wenn man mit J den Inhalt des ebenen Dreiecks bezeichnet:

$$\varepsilon = 2 H J.$$

welcher die Azimuthe gezählt werden, entgegengesetzt angenommen ist. Die andere Anordnung der Bezeichnungen hat übrigens weiter keinen Einfluss auf das Resultat, als dass ein negativer Werth für ϵ erhalten wird.

Erstes Beispiel. Es werde der sphäroidische Excess des Dreiecks Brocken-Hohehagen-Inselsberg, welches eins der grössten unmittelbar gemessenen Dreiecke ist, nach der Formel 38) berechnet.

Brocken	$x_1 = -30310^m$	$y_1 = -46419^m$
Hohehagen	$x_2 = +6060$	$y_2 = +12448$
Inselsberg	$x_3 = +75234$	$y_3 = -36850$
	$x = +16995$	
	$x - x_1 = +47305$	$y_2 - y_3 = +49298$
	$x - x_2 = +10935$	$y_3 - y_1 = +9569$
	$x - x_3 = -58239$	$y_1 - y_2 = -58867$
$H . . .$	1.40357	1.40357
$x - x_1 . . .$	4.67490	4.76521
$y_2 - y_3 . . .$	4.69283	4.76987
	0.77130 . . . + 5".9061	9.42326 . . . + 0".2650
		0.93865 . . . + 8".6826
Der Werth des Gliedes		5.9061
4. Ordnung ist hier:		8.6826
+ 0".00015		$\epsilon = 14".8537$

Zweites Beispiel. Es ist nach Formel 37) der sphäroidische Excess des Dreiecks Göttingen-Altona-Bentheim zu berechnen.

Göttingen	$x_1 = 0$	$y_1 = 0$
Altona	$x_2 = -224495^m.3$	$y_2 = +16^m.4$
Bentheim	$x_3 = -89758 .1$	$y_3 = +190025 .2$
	$x = -104700$	$s = +190041 .6$
	$x_2 - x_1 = -224495 .3$	$s - y_3 = +16 .4$
	$x_3 - x_2 = +134737 .2$	$s - y_1 = +190041 .6$
	$x_1 - x_3 = +89758 .1$	$s - y_2 = +190025 .2$
$H . . .$	1.403463	1.403463
$x_2 - x_1 . . .$	5.351207	4.953073
$s - y_3 . . .$	1.214844	5.278811
	7.969514 . . . - 0".0093	1.811800 . . . + 64".8336
		1.635347 . . . + 43".1864
$\alpha . . .$		5.3088
		7.1206
$(x_2 - x_1)^2 . . .$	0.2590	6.9441
		9.9061
	7.3796 . . . + 24	6.8502 . . . + 7
$(s - y_3)^2 . . .$	0.5577	0.5576
	7.6783 . . . - 48	7.5017 . . . - 32
	- 0".0093	+ 64".8312
		43.1839
		*07
		$\epsilon = 108".0058 = 1'48".0058$

Nach Vorschrift der Formel 36) erhält man aus den auf S. 83 berechneten Reductionen ψ_1 und ψ_2 : $\epsilon = 1'48".0059$, also nur um eine Einheit der 4. Decimalstelle von dem eben berechneten Werthe verschieden (siehe die Note auf S. 84).

Schlussbemerkungen.

Als Gauss im Jahre 1821 seine geodätischen Messungen begann, hatten diese nur eine von Göttingen bis Altona sich erstreckende Gradmessung zum Zweck. Erst im Jahre 1824 wurde eine Fortsetzung der Messungen nach Westen behuf Anschlusses an die Holländischen Dreiecke, und im Jahre 1827 eine Ausdehnung derselben über das ganze Königreich Hannover beschlossen. Gauss hat daher seine Projection nur mit Rücksicht auf die Breitengradmessung gewählt. Diesem Zwecke entspricht auch die Beschaffenheit der Projection vorzugsweise, indem sie am vortheilhaftesten auf Messungen von geringer Längenausdehnung anzuwenden ist, während die Ausdehnung in der Richtung des Meridians beliebig gross sein kann.

Man erkennt dies in übersichtlicher Weise aus der in §. 12 gegebenen kleinen Tafel, welche die Veränderlichkeit des Vergrößerungsverhältnisses m zeigt. Man sieht daraus, dass m mit der Entfernung vom Hauptmeridian rasch wächst, von der geographischen Breite hingegen in viel geringerem Grade abhängig ist. Insofern nun das Vergrößerungsverhältniss als Ausdruck für das mehr oder minder genaue Anschmiegen der Darstellung an das Dargestellte angesehen werden kann, durch dieses genaue Anschmiegen aber die Bequemlichkeit der Berechnungen, welche eine Projection erfordert, und damit die Zweckmässigkeit der Projection selbst wesentlich bedingt wird, kann das Vergrößerungsverhältniss auch als Maassstab für die Ausdehnung dienen, innerhalb welcher die Projection zweckmässig anzuwenden ist. *)

In Uebereinstimmung hiermit kann man auch bemerken, dass die vorstehend abgeleiteten Reihen um so rascher convergiren, je kleiner λ oder y ist, während ihre Convergenz von φ oder x so gut wie gar nicht abhängt.

Als die Breitengradmessung ungefähr 6 Jahre nach ihrem Beginn zu einer Landesvermessung erweitert wurde, hat Gauss die einmal gewählte Projection beibehalten, um eine Umarbeitung der bereits ausgeführten Rechnungen zu vermeiden. Wohl schwerlich würde Gauss diese Projection von vornherein einer Vermessung des ganzen Königreichs zu Grunde gelegt haben.

*) Durch eine ausserordentlich geringe Veränderlichkeit des Vergrößerungsverhältnisses zeichnet sich eine von Gauss entwickelte conforme Uebertragung der Ellipsoidfläche auf die Kugelfläche aus (Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie. Erste Abhandlung. 1843). Obwohl Gauss diese Projection nur auf wirklich gemessene Dreiecksketten und auf eine Zone von 12 Breitengraden anwendet, so lässt sich doch durch zweckmässige Erweiterung der Entwicklungen die Anwendung auf eine Zone von über 25 Breitengraden und auf Linien von gleicher Länge bei einer Schärfe von $\frac{1}{1000}$ Secunde ausdehnen. Die Behandlung der Messungen behuf Berechnung ist dem vorstehend beschriebenen Verfahren analog; alle Rechnungen aber behuf Uebertragung von Punkten, Linien, Azimuthen etc. von einer Fläche auf die andere sind ungleich leichter auszuführen.

Der ursprüngliche Zweck der Projection erklärt auch die für die Landesvermessung ungünstige Lage des Anfangspunktes, der am vortheilhaftesten für diese nahezu einen Längengrad westlicher, d. i. ungefähr auf dem mittlern Meridian des Königreichs, liegen würde. Denn wie man leicht erkennt, ist es keineswegs erforderlich, dass der Anfangspunkt einem astronomisch bestimmten Dreieckspunkte oder überhaupt nur einem nachweisbaren Punkte der Erdoberfläche entspreche; man kann vielmehr für einen astronomisch bestimmten Punkt, als Ausgangspunkt der Messungen, solche Coordinaten in runden Zahlen festsetzen, dass der Anfangspunkt nahezu auf den mittlern Meridian des zu vermessenden Gebiets fällt.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

T A F E L N.

Tafel I.

φ	$\psi - \varphi$	Diff.	$\log F$	Diff.	$\log A$	$\log A'$	$\log B$	$\log B'$
50° 0'	28.112328	8662	7.1064695 48	4116	6.94060	— 10	6.763318	— 10
10	120990	8947	4736 64	4112	59	156	314	3513
20	129937	9232	4777 76	4107	57	159	310	3516
30	139169	9515	4818 83	4103	56	162	306	3518
40	148684	9798	4859 86	4098	55	165	302	3521
50	158482	10082	4900 84	4093	54	168	298	3522
51 0	28.168564	10365	7.1064941 77	4088	6.94053	3.171	6.763294	3.3524
10	178929	10647	4982 65	4083	51	174	289	3525
20	189576	10930	5023 48	4078	50	176	285	3525
30	200506	11211	5064 26	4073	49	179	281	3526
40	211717	11492	5104 99	4067	48	181	277	3525
50	223209	11774	5145 66	4061	46	183	273	3525
52 0	28.234983	12055	7.1065186 27	4055	6.94045	3.186	6.763269	3.3524
10	247038	12334	5226 82	4050	44	188	265	3523
20	259372	12615	5267 32	4043	43	190	261	3521
30	271987	12894	5307 75	4037	42	192	257	3519
40	284881	13173	5348 12	4031	40	193	253	3517
50	298054	13451	5388 43	4025	39	195	249	3514
53 0	28.311505	13730	7.1065428 68	4017	6.94038	3.197	6.763245	3.3511
10	325235	14007	5468 85	4011	37	198	241	3508
20	339242	14285	5508 96	4004	36	200	237	3504
30	353527	14562	5549 00	3997	34	201	233	3500
40	368089	14837	5588 97	3990	33	203	229	3495
50	382926	15114	5628 87	3982	32	204	225	3490
54 0	28.398040	15388	7.1065668 69	3975	6.94031	3.205	6.763221	3.3485
10	413428	15664	5708 44	3968	30	206	217	3479
20	429092	15937	5748 12	3960	28	207	213	3474
30	445029	16212	5787 72	3952	27	208	209	3467
40	461241	16484	5827 24	3943	26	209	205	3461
50	477725	16757	5866 67	3936	25	210	201	3454
55 0	28.494482		7.1065906 03		6.94024	3.210	6.763197	3.3446

Wegen der zweiten Differenz erhält $\psi - \varphi$ die Correction $-\frac{1}{2}n(10-n)\frac{A''}{100}$.

" " " " " $\log F$ " " $+\frac{1}{2}n(10-n)\frac{A''}{100}$,

wo n = Einer mit Decimalstellen der Minuten von φ .

A'' = Absolutwerth der zweiten Differenz.

Hülftafel.
Coefficient $\frac{1}{2}n(10-n)$.

Einer von n	1. Decimalstelle von n											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
0,	0.00	0.50	0.98	1.46	1.92	2.38	2.82	3.26	3.68	4.10	4.50	9,
1,	4.50	4.90	5.28	5.66	6.02	6.38	6.72	7.06	7.38	7.70	8.00	8,
2,	8.00	8.30	8.58	8.86	9.12	9.38	9.62	9.86	10.08	10.30	10.50	7,
3,	10.50	10.70	10.88	11.06	11.22	11.38	11.52	11.66	11.78	11.90	12.00	6,
4,	12.00	12.10	12.18	12.26	12.32	12.38	12.42	12.46	12.48	12.50	12.50	5,
		9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Einer von n
1. Decimalstelle von n												

Tafel III.

x	$\log H$	$\log h$
	— 10	— 20
—405422	1.40320	1.9143
393608	1.40321	1.9149
381811	1.40322	1.9155
370030	1.40323	1.9161
358264	1.40324	1.9167
346513	1.40325	1.9173
334778	1.40326	1.9178
323058	1.40327	1.9184
311353	1.40328	1.9190
—299662	1.40329	1.9195
287985	1.40330	1.9201
276323	1.40331	1.9206
264675	1.40332	1.9211
253040	1.40333	1.9216
241419	1.40334	1.9222
229811	1.40335	1.9227
218216	1.40336	1.9232
206635	1.40337	1.9237
195066	1.40338	1.9241
—183509	1.40339	1.9246
171965	1.40340	1.9251
160433	1.40341	1.9256
148913	1.40342	1.9260
137405	1.40343	1.9265
125908	1.40344	1.9269
114423	1.40345	1.9274
102949	1.40346	1.9278
91486	1.40347	1.9282
80034	1.40348	1.9287
—68593	1.40349	1.9291
57162	1.40350	1.9295
45742	1.40351	1.9299
34331	1.40352	1.9303
22931	1.40353	1.9307
11541	1.40354	1.9311
—160	1.40355	1.9314
+11212	1.40356	1.9318
22574	1.40357	1.9322
33926	1.40358	1.9325
+45270	1.40359	1.9329
56605	1.40360	1.9332
67932	1.40361	1.9336
79249	1.40362	1.9339
90559	1.40363	1.9343
101860	1.40364	1.9346
113154	1.40365	1.9349
124439	1.40366	1.9352
135717	1.40367	1.9355
146987	1.40368	1.9358
158250	1.40369	1.9361
+169506	1.40370	1.9364
	1.40371	1.9367

Tafel II.

ψ	$\chi - \psi$	Diff.									
49° 20'	31'.894485	8425									
30	886060	8708									
40	877352	8993									
50	868359	9275									
50 0	31'.859084	9559									
10	849525	9841									
20	839684	10123									
30	829561	10406									
40	819155	10687									
50	808468	10968									
51 0	31'.797500	11249									
10	786251	11529									
20	774722	11810									
30	762912	12089									
40	750823	12368									
50	738455	12647									
52 0	31'.725808	12925									
10	712883	13203									
20	699680	13481									
30	686199	13757									
40	672442	14034									
50	658408	14310									
53 0	31'.644098	14586									
10	629512	14860									
20	614652	15135									
30	599517	15408									
40	584109	15682									
50	568427	15955									
54 0	31'.552472	16227									
10	536245	16499									
20	519746	16770									
30	502976	17041									
40	485935	17311									
50	468624	17580									
55 0	31'.451044										

In Tafel II. hat die erste mit ψ überschriebene Columnne, welche die Argumente enthält, eine doppelte Bedeutung. Man geht mit dem aus x berechneten ψ in die erste Columnne ein, und findet mit Hülfe der zweiten Columnne das zugehörige χ . Mit dem so erhaltenen χ geht man wieder in die erste Columnne ein, um die zugehörigen Werthe von $\log G$, $\log H$, $\log C$, etc. aus der Tafel zu entnehmen.

Wegen der zweiten Differenz erhält $\chi - \psi$ die Correction $+\frac{1}{2}n(10-n)\frac{\Delta''}{100}$.

„ „ „ „ „ $\log G$ „ „ $-\frac{1}{2}n(10-n)\frac{\Delta''}{100}$,

wo n = Einer mit Decimalstellen der Minuten resp. von ψ oder χ .

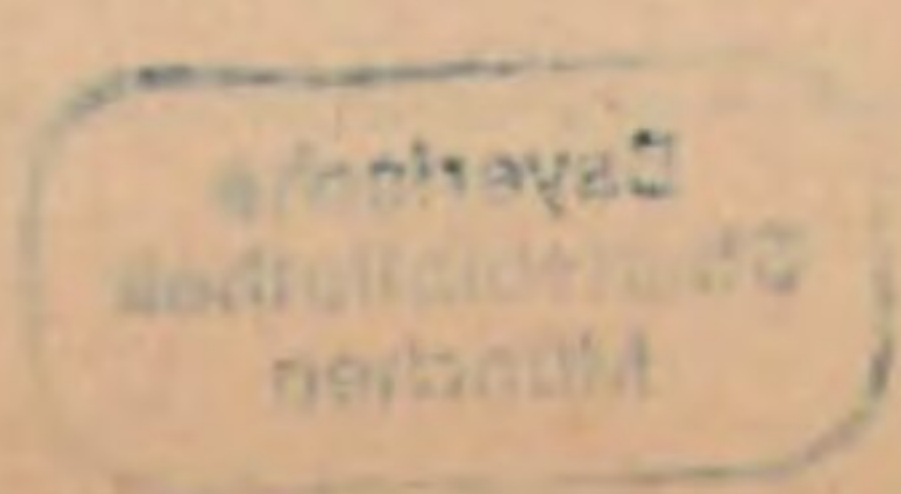
Δ'' = Absolutwerth der zweiten Differenz.

Siehe die nebenstehende Hülftafel.

Table II		Table III	
Year	Value	Year	Value
1900	100	1900	100
1901	105	1901	105
1902	110	1902	110
1903	115	1903	115
1904	120	1904	120
1905	125	1905	125
1906	130	1906	130
1907	135	1907	135
1908	140	1908	140
1909	145	1909	145
1910	150	1910	150
1911	155	1911	155
1912	160	1912	160
1913	165	1913	165
1914	170	1914	170
1915	175	1915	175
1916	180	1916	180
1917	185	1917	185
1918	190	1918	190
1919	195	1919	195
1920	200	1920	200
1921	205	1921	205
1922	210	1922	210
1923	215	1923	215
1924	220	1924	220
1925	225	1925	225
1926	230	1926	230
1927	235	1927	235
1928	240	1928	240
1929	245	1929	245
1930	250	1930	250
1931	255	1931	255
1932	260	1932	260
1933	265	1933	265
1934	270	1934	270
1935	275	1935	275
1936	280	1936	280
1937	285	1937	285
1938	290	1938	290
1939	295	1939	295
1940	300	1940	300
1941	305	1941	305
1942	310	1942	310
1943	315	1943	315
1944	320	1944	320
1945	325	1945	325
1946	330	1946	330
1947	335	1947	335
1948	340	1948	340
1949	345	1949	345
1950	350	1950	350
1951	355	1951	355
1952	360	1952	360
1953	365	1953	365
1954	370	1954	370
1955	375	1955	375
1956	380	1956	380
1957	385	1957	385
1958	390	1958	390
1959	395	1959	395
1960	400	1960	400
1961	405	1961	405
1962	410	1962	410
1963	415	1963	415
1964	420	1964	420
1965	425	1965	425
1966	430	1966	430
1967	435	1967	435
1968	440	1968	440
1969	445	1969	445
1970	450	1970	450
1971	455	1971	455
1972	460	1972	460
1973	465	1973	465
1974	470	1974	470
1975	475	1975	475
1976	480	1976	480
1977	485	1977	485
1978	490	1978	490
1979	495	1979	495
1980	500	1980	500
1981	505	1981	505
1982	510	1982	510
1983	515	1983	515
1984	520	1984	520
1985	525	1985	525
1986	530	1986	530
1987	535	1987	535
1988	540	1988	540
1989	545	1989	545
1990	550	1990	550
1991	555	1991	555
1992	560	1992	560
1993	565	1993	565
1994	570	1994	570
1995	575	1995	575
1996	580	1996	580
1997	585	1997	585
1998	590	1998	590
1999	595	1999	595
2000	600	2000	600

The following table shows the results of the experiments conducted in 1900 and 1901. The first column gives the year, the second column the value of the variable x , and the third column the value of the function $f(x)$. The values of x are taken from the first column of Table I, and the values of $f(x)$ are calculated from the formula $f(x) = x^2 + 1$.

The following table shows the results of the experiments conducted in 1902 and 1903. The first column gives the year, the second column the value of the variable x , and the third column the value of the function $f(x)$. The values of x are taken from the first column of Table I, and the values of $f(x)$ are calculated from the formula $f(x) = x^2 + 1$.



THEORIE
DER
PROJECTIONS-METHODE

DER
HANNOVERSCHEN LANDESVERMESSUNG

VON
OSCAR SCHREIBER,
HAUPTMANN IM KÖNIGL. HANNOV. 1. JÄGER-BATAILLON.

2. 24.
C.

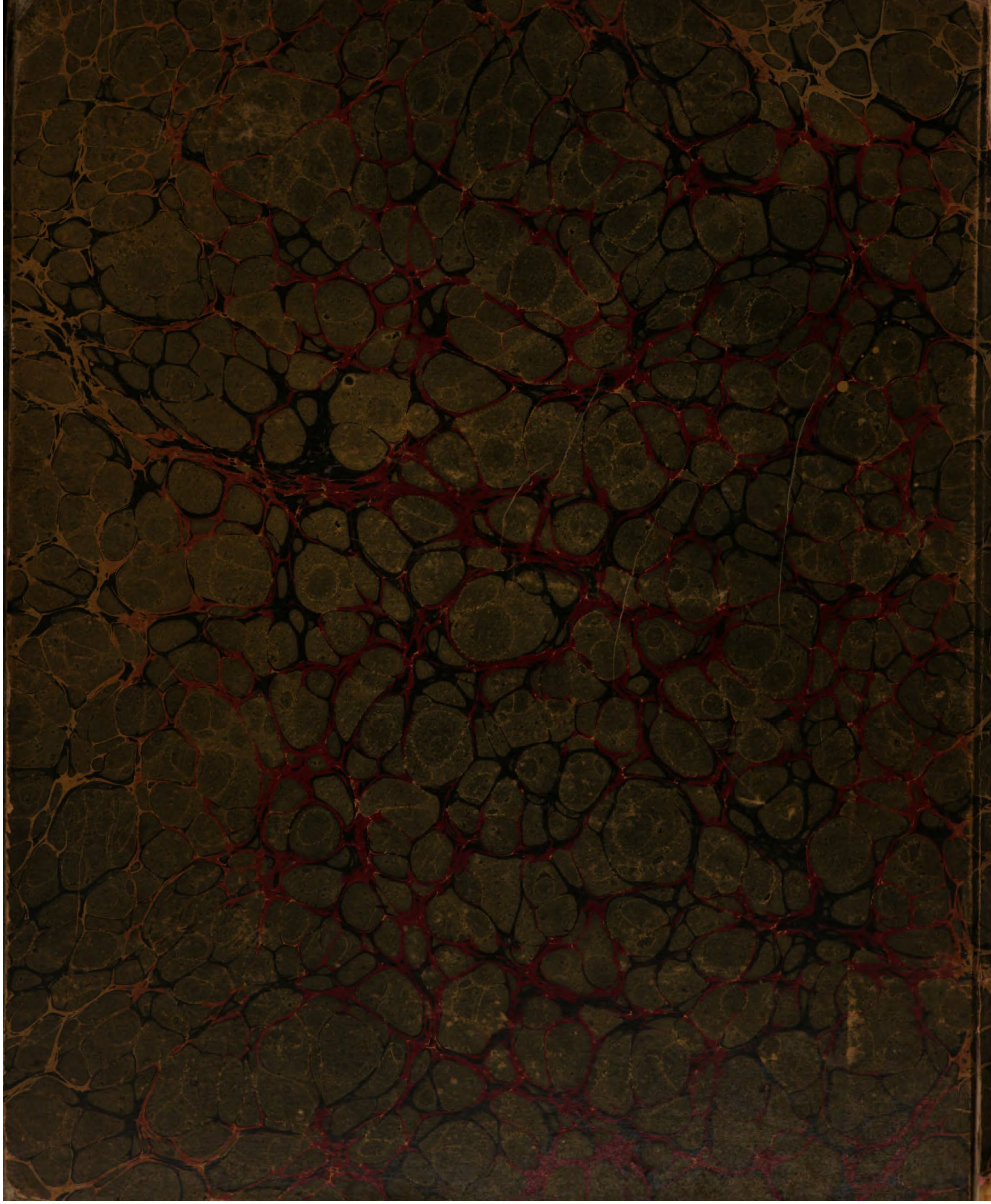
A. a.
Schr.

HANNOVER.
HAHN'SCHE HOFBUCHHANDLUNG.
1866.

Prof. Dr. Schr.

Inv. N^o





Schreiber, Oskar

Theorie der Projektionsmethode der hannover'schen Landesvermessung

Hannover 1866

4 Math.p. 411 k

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10054065-2